Gaston DOIN et Cie, Éditeurs, 8, place de l'Odéon, Paris, 6e

# ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

**Publiée sous la direction du Dr TOULOUSE**

## BIBLIOTHÈQUE
## D'ASTRONOMIE ET PHYSIQUE CÉLESTE

Directeur : J. MASCART

Directeur de l'Observatoire de Lyon

L'astronomie est, assurément, la plus troublante des sciences, celle qui sut mettre en jeu, depuis la plus haute antiquité, les réflexes humains les plus mystérieux, l'angoisse de l'indéfini, et l'angoisse du temps. Si les phénomènes extérieurs n'avaient pas imposé à l'esprit la nécessité d'un milieu, d'un espace, dont ils sont en même temps et la condition et la conséquence ; si, par là, ces phénomènes ne s'étaient pas montrés réciproquement dépendants, le monde n'eût été pour l'homme qu'un état de réalité apparente, et sans répercussion possible sur l'individu.

Mais il en est autrement : les manifestations célestes, ou atmosphériques, sont trop absolues, trop douloureuses, pour ne pas imposer une nécessité objective, matérielle. Et l'homme eut recours à l'étude des faits — dans le but non dissimilé de les prévoir.

Il s'agissait donc, tout d'abord, de fixer les positions des objets et d'en étudier les variations possibles ; de préciser, dans le temps, la situation des singularités célestes pour en

prédire le retour : et, à cet égard, la persévérance et l'habileté des anciens restent, à l'heure actuelle, des objets dignes d'admiration. L'astronomie de position, depuis la plus haute antiquité, fut l'objet unique et assez vaste de la curiosité : ses développements incessants, sauf en ce qui concerne un Moyen âge ténébreux, imposent à Képler une nouvelle conception mécanique et font, à la fin du XIX^e siècle, un véritable monument d'observations patientes et précises.

A côté de la voie principale, quels ne sont pas les sentiers où il fallut s'engager !

L'exécution des calculs numériques tint bientôt une place prépondérante et nécessita les travaux les plus délicats pour être rendue aussi simple, aussi aisée, aussi rapide que possible ; l'étude des erreurs, systématiques ou accidentelles, vint dominer l'approximation pour soumettre les méthodes aux procédés d'observation. Ainsi, sans aucun doute, fut créée une science à part, véritable prolongement des mathématiques pures, science du calcul proprement dit : ses principes sont de la plus haute utilité pour tous ceux qui, dans un ordre d'application quelconque, ont à exécuter sur des nombres des opérations plus ou moins compliquées, et les variantes du calcul graphique ou du calcul mécanique sont loin d'avoir donné toute leur mesure.

La mécanique de Newton allait poser à l'analyse pure une des énigmes les plus redoutables de la mathématique, à l'heure même où les physiciens et les artistes devaient rivaliser d'ingéniosité et de talent pour aboutir aux puissantes ressources de l'optique moderne.

Et il ne faudrait pas croire que la géométrie pure, elle-même, soit restée en dehors de cette influence : arpentage dès l'origine, elle tend à la mesure des objets terrestres et de leurs formes, et, sous la pression de l'astronomie, elle

engendre bientôt la topographie, la géodésie, avec tout leur appareil de mesures délicates et de calculs très précis.

Est-il besoin de se demander ce que deviendrait le navigateur privé des ressources de l'astronomie ? Faut-il s'appesantir sur la répercussion de cette science en ce qui concerne la cartographie, la métrologie, la géométrie perspective ou la métrophotographie, la météorologie ou la sismologie?

Il y a plus encore : la chimie, jusqu'alors écartée, va être interrogée dans son mécanisme le plus intime et le plus profond, et par l'analyse spectrale, et par la photographie. Ce sont les plus profondes transformations, et elles datent d'hier. Non content de l'aspect et des trajectoires des astres, l'astronome veut en sonder la structure, le mécanisme — et l'avenir — par l'analyse spectrale ; insatiable dans son besoin de précision, il veut photographier le ciel, le fixer, le figer sur une plaque. Mais, alors, la nature se refuse, la matière se révolte ; l'instrument se cabre devant la précision qu'on lui demande, et mille problèmes nouveaux surgissent pour éviter les plus petites erreurs, pour en trouver l'origine et le remède ; le microscope est buté devant le grain de la gélatine, devant la vie même et la transformation du colloïde.

N'est-ce pas là un domaine immense ? et qui peut songer à l'embrasser ?

Si le développement de l'astronomie est un des plus singuliers, des plus importants et des plus étendus dans la science moderne, les progrès réalisés ont souvent conduit à des révolutions complètes dans les procédés d'observation et de mesure, dans la direction et l'interprétation des expériences ; au cours de ces transformations, il y a lutte incessante entre les vieilles et les nouvelles méthodes, les procédés les plus classiques se transforment, les nouvelles recherches apprennent à utiliser au mieux les données empruntées à des sciences lointaines.

à être envisagées dans des volumes distincts, sous des points de vue d'autant plus fructueux qu'ils seront plus différents ; et, tout en élargissant ainsi le champ de leur action, les astronomes se réjouiront de trouver, sur chaque objet, une bibliographie complète et précise qui leur évitera bien des ennuis.

Tel est le plan : il restait à le réaliser.

Ici, les difficultés ne font point défaut, et l'exposé de ce que nous avons voulu faire nous sera une excuse pour les inévitables imperfections. En premier lieu, il fallait imaginer une subdivision un peu arbitraire : elle a été faite pour le mieux, de sorte que chaque volume renferme un ensemble assez étendu. Peut-être telle question, *à la mode* aujourd'hui, paraîtra-t-elle sacrifiée vis-à-vis de telle autre dont l'intérêt nous *semble* épuisé ; mais on voudra bien convenir, en revanche, que le passé même des vieux problèmes porte en lui son enseignement et mérite une étude critique. En second lieu, tous les livres de cette classification ne présentent pas le même caractère d'urgence : en tenant compte des autres publications, des ouvrages récents, nous avons cru préférable de différer, pour l'instant, quelques-uns de ces volumes, qui viendront plus utilement à un autre moment.

Au milieu d'intérêts si divers et d'une satisfaction malaisée, nous avons adopté le plan ci-joint, soutenus uniquement par l'espoir de collaborer à une œuvre logique et utile.

Les volumes sont publiés dans le format in-18 jésus cartonné ; ils forment chacun 350 pages environ avec ou sans figures dans le texte. Chaque ouvrage se vend séparément.

Voir, à la fin du volume, la liste des bibliothèques de l'ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE ainsi que celle des volumes publiés.

# TABLE DES VOLUMES
# ET LISTE DES COLLABORATEURS

---

1. **L'Astronomie** : Observations, Théorie et Vulgarisation générale, par M. Moye, Professeur à l'Université de Montpellier.
2. **Histoire de l'Astronomie**, par E. Doublet, Astronome à l'Observatoire de Bordeaux.
3. **Histoire et rôle des observations astronomiques**, par J. Chatelu, Astronome à l'Observatoire de Paris.
4. **Astronomie sphérique.**
5. **Astronomie de position.**
6. **Observations méridiennes**, 2 volumes, par F. Boquet, Astronome titulaire à l'Observatoire de Paris.
7. **Observations extra-méridiennes.**
8. **Optique astronomique.**
9. **Calcul des Orbites et Éphémérides**, par Luc Picart, Directeur de l'Observatoire de Bordeaux.
10. **La Mécanique céleste.**
11. **Calcul des perturbations.**
12. **Théorie de la Lune et des Satellites.**
13. **Attraction universelle.**

14. **La Terre.**

15. **Le Soleil,** par **J. Guillaume,** Astronome à l'Observatoire de Lyon.

16. **Les Théories modernes du Soleil,** par J. Bosler.

17. **La Lune et les Marées.**

18. **Les Éclipses.**

19. **Mesure du temps.**

20. **Les Étoiles simples,** par F. Henroteau, Astronome à l'Observatoire de la puissance du Canada à Ottawa.

21. **Étoiles multiples, amas et nébuleuses.**

22. **Les grosses planètes.**

23. **Petites planètes, bolides et étoiles filantes.**

24. **Les Comètes,** par M. Esclangon. Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

25. **Phénomènes singuliers en astronomie.**

26. **Les Constantes astronomiques.**

27. **Spectroscopie astronomique,** par P. Salet, Astronome à l'Observatoire de Paris.

28. **Photographie astronomique,** par E. Touchet.

29. **Constitution et évolution de l'Univers,** par A. Véronnet, Astronome à l'Observatoire de Strasbourg.

2300
Toronto
28

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

du Dr TOULOUSE

Secrétaire général : H. PIÉRON.

BIBLIOTHÈQUE D'ASTRONOMIE ET PHYSIQUE CÉLESTE

Directeur : J. MASCART

Directeur de l'Observatoire de Lyon

# CONSTITUTION ET ÉVOLUTION DE L'UNIVERS

Tous droits réservés
Copyright by Gaston DOIN et Cie. 1926

# PRÉFACE

Le programme de ce volume de la *Bibliothèque d'Astronomie* comportait l'étude scientifique et mathématique des différents travaux relatifs aux problèmes qui se posent à propos de la constitution physique, de l'évolution et de la formation des astres et qui ont été étudiés par H. Poincaré dans ses deux ouvrages, sur les *Figures d'équilibre* et les *Hypothèses cosmogoniques*.

L'équilibre physique d'un *astre liquide* est étudié dans les deux premiers chapitres. C'est un problème de mécanique pure. Il comprend d'abord l'étude des figures d'équilibre d'un liquide *homogène* en rotation, les *curieuses* figures dérivées des ellipsoïdes par Poincaré, leur fractionnement possible. Puis c'est l'étude d'un liquide *hétérogène*, qui permet de déterminer la figure exacte de la Terre et des planètes, et, jusqu'à un certain point, leur constitution interne. H. Poincaré a déterminé ainsi une limite fondamentale de l'aplatissement, ce qui a précisé et renouvelé toute la question, en posant de nouveaux problèmes aux mathématiciens et aux géodésiens.

L'équilibre physique d'un *astre gazeux*, comme le soleil, est plus complexe. Il fait intervenir la loi des gaz, la température et la pression. C'est un problème de physique, autant que de mécanique. La loi des gaz parfaits

n'est plus applicable aux pressions réalisées dans les étoiles. Il faut appliquer ici la *loi des gaz réels*, avec densité limite. On trouve, dans tous les cas d'équilibre, un noyau de densité et de température sensiblement uniformes, très nettement séparé de l'atmosphère. Les températures intérieures ne dépassent pas deux ou trois fois la température superficielle. Les millions de degrés, qui n'ont aucun sens physique, sont inutiles. Avec la dilatation, la température intérieure passerait par un maximum très élevé, correspondant au cycle de Lockyer et de Russel. Ce maximum est purement théorique. Le calcul détermine également la limite d'extension de l'atmosphère. On possède ainsi toutes les conditions physiques de l'équilibre. Cette étude forme l'objet des chapitres 3, 4 et 5.

L'étude sur l'équilibre d'un astre gazeux a montré que les conditions physiques n'ont pas dû varier beaucoup, sont restées voisines des conditions actuelles. On peut établir sur une base solide *l'évolution du Soleil* et des étoiles, et l'évolution corrélative de la Terre, au moyen de la *loi du rayonnement* de Stefan. On peut faire accorder les déterminations du temps d'évolution autour de quelques millions d'années. D'ailleurs des milliards d'années ne nous rapprocheraient guère plus de l'origine, rejetée à l'infini. Le problème astronomique de l'évolution et des origines ne peut commencer qu'après la formation des atomes et l'apparition de la gravitation. Ce problème de l'évolution occupe les chapitres 6 et 7.

Les études cosmogoniques n'avaient guère considéré

que le *problème cosmogonique restreint*, c'est-à-dire limité à la recherche de la formation du système solaire. Je me suis efforcé d'étendre les calculs au *problème général* de la formation des étoiles dans un milieu nébulaire indéfini. Le problème restreint en est d'ailleurs inséparable. Les chapitres suivants étudient ces résultats. L'attraction seule suffit pour expliquer la concentration des astres, leurs mouvements de translation et de rotation, leurs températures, sans autre hypothèse que celle de la matière dispersée dans l'espace (chapitres 8 à 11).

Dans cette matière dispersée à l'état de nébuleuse indéfinie, les moindres variations de densité créent des centres d'attraction, qui agglomèrent progressivement toute la matière contenue dans leur sphère d'action. Les centres faibles et rapprochés forment les météorites, analogues aux comètes, qui se concentrent les premières. Les centres d'ordre supérieur formeront ensuite les étoiles et plus tard les amas d'étoiles. Ces derniers semblent encore dans la période de concentration. Leur individualisation est à peine marquée dans la Voie Lactée (ch. 8).

Pour les étoiles, le calcul montre qu'il y a une corrélation très étroite entre le temps de formation et la température, quelles que soient les conditions extérieures. Si le temps augmente, la température diminue et réciproquement. Ils se limitent étroitement, la température de formation ne peut guère dépasser le double ou le triple des températures actuelles. On ne trouve aucun phénomène capable de produire des millions de degrés.

Pour la formation dans un milieu indéfini, on distingue deux périodes bien distinctes. Une *période d'amorçage*, où la condensation du premier millième de la masse peut atteindre des centaines de millions d'années, puis la *période principale*, beaucoup plus rapide, où la formation des 999 millièmes restant, ainsi que le temps et la température, ne dépendent que de la densité moyenne du milieu, connue en gros par la densité des étoiles. On trouve au cours de la formation d'une étoile un *maximum de température*, à partir duquel commence *l'évolution* de l'étoile, avec température décroissante. La formation normale ne peut donner aucune étoile à grand rayon, sauf pour de très grandes masses. Le rayon primitif n'a pas dû atteindre même le double du rayon actuel (ch. 9).

On a cru autrefois que la nébuleuse primitive indéfinie s'était d'abord partagée en lambeaux distincts. Chacun de ces lambeaux aurait formé une nouvelle nébuleuse particulière, qui se serait condensée progressivement en étoile, en augmentant de température jusqu'à un maximum.

Les calculs précédents, sur l'équilibre physique d'une masse gazeuse, montrent que la masse n'a pas pu rester en équilibre avec un très grand rayon. De plus on ne trouve aucune cause capable de communiquer au milieu primitif des mouvements d'ensemble, qui l'auraient fractionné en lambeaux distincts, et nous n'avons pas le droit d'introduire ici aucun mouvement arbitraire, inexpliqué.

Le calcul montre alors que la condensation d'une étoile a *commencé par le centre*, et non par la périphérie. Chaque étoile a drainé progressivement toute la matière contenue dans sa sphère d'action, sans former, à aucun moment, une nébuleuse séparée du reste. La nébuleuse primitive indéfinie s'est donc condensée ainsi directement en étoiles, bien individualisées dès le début, et peu différentes des étoiles actuelles.

Le calcul permet d'étudier de même les conditions de formation des amas stellaires et leurs vitesses, les courants stellaires, les systèmes doubles, les *étoiles nouvelles*, les nébuleuses spirales, etc. La conflagration que révèlent les étoiles nouvelles provient sans doute de la fusion d'une grosse planète, ou d'un satellite, à l'astre central. La pression de radiation de ces étoiles rajeunies peut être suffisante pour maintenir autour de l'astre central, une enveloppe de particules, à grand rayon et faible température, qui en fait une *étoile géante*. Ces étoiles qui sont exceptionnelles, suivront seules le cycle de Lockyer et de Russel. La température de l'enveloppe augmente, alors que son rayon diminue, jusqu'à ce qu'elle vienne au contact de l'astre central. L'étoile est redevenue alors étoile *naine*, ou normale, et sa température décroît indéfiniment. Les *nébuleuses spirales* peuvent être considérées de même comme le résultat du rapprochement de deux amas stellaires, déjà condensés, et formant un système double, où la pression de radiation donnera naissance aux spires (ch. 10).

Si on tient compte enfin de l'attraction des étoiles

voisines, sur les particules qui viennent former une étoile, on trouve qu'à partir d'une certaine distance il y a nécessairement déviation. Il se forme des lambeaux qui viendront tourner successivement autour de l'astre central. Le calcul montre que l'on obtient ainsi le moment de rotation nécessaire et suffisant pour former les planètes. Ce moment de rotation constitue l'élément mécanique fondamental et invariable du système planétaire, que toutes les théories prenaient comme *donné*, sans essayer de l'expliquer. Le même calcul montre qu'il doit fournir en général une rotation directe pour les planètes, sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir d'autres hypothèses. Enfin une nouvelle étude des formules de la résistance du milieu permet de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour donner aux planètes leurs trajectoires sensiblement circulaires. Chaque étoile posséderait ainsi un, et même plusieurs systèmes de planètes et de comètes, dont la masse totale pourrait être plus considérable que la masse de l'étoile centrale. C'est le chapitre II.

Ainsi notre système planétaire ne serait plus une exception, mais la règle. Ainsi partout dans l'Univers, la vie et la pensée seraient la règle et non l'exception, car nous devons admettre que le Créateur, ou la Nature, ont mis dans le monde, dès l'origine, tout ce qu'il fallait pour qu'il en sorte tout ce que nous y voyons.

Le dernier chapitre donne l'exposé et l'étude critique des hypothèses cosmogoniques modernes, en montrant les tâtonnements successifs de tous ceux qui ont voulu

remonter aux origines et ce que chacun d'eux a apporté à l'œuvre d'ensemble.

J'avais déjà publié dans les *Hypothèses cosmogoniques modernes*, 1914, une étude critique plus détaillée correspondant à ce dernier chapitre. C'était un ensemble d'articles, parus dans la *Revue philosophique* et suggérés par les *Leçons* de H. Poincaré.

Le premier chapitre est un résumé du tome 4 *du Traité de mécanique rationnelle* de M. P. Appell sur les figures d'équilibre, à la rédaction duquel j'avais eu le grand honneur de collaborer. J'avais repris dans ma thèse l'étude des matières du second chapitre sur la *Forme de la Terre* et la limite de Poincaré.

Enfin à la suite des études critiques de Poincaré, je me suis consacré depuis dix ans à l'étude méthodique de la constitution physique, de l'évolution et de la formation des astres. J'ose espérer avoir pu ainsi retenir et mettre en relief tout ce qui, sur ces questions, peut présenter un caractère vraiment scientifique.

On voit aussi que, depuis les *Figures d'équilibre* jusqu'aux *Hypothèses cosmogoniques*, ce sont les derniers travaux de Poincaré qui dominent et coordonnent tout ce travail.

On peut dire d'ailleurs, sans crainte de se tromper, que ces travaux de Poincaré ont ouvert et consacré scientifiquement une *nouvelle période* des plus fécondes de la science astronomique, qui consistera dans l'étude mathématique et méthodique des bases physiques de l'Astronomie, et de toutes les théories modernes qui se

proposent la connaissance de la constitution et de l'évolution de l'Univers, la véritable astronomie de l'avenir.

La première période de l'Astronomie moderne, période d'observation, avait vu les travaux de Tycho-Brahé et abouti aux lois empiriques de Képler.

La seconde période de l'astronomie de position, période de déduction, ouverte par la découverte de la loi de Newton, avait créé la *Mécanique céleste*. Elle avait expliqué *mathématiquement* tous les mouvements et la forme des astres. Elle avait été couronnée par les travaux de Poincaré sur le problème des trois corps et les Figures d'équilibre.

Le 19e siècle avait vu naître une autre astronomie plus vivante et plus ambitieuse, l'Astronomie physique, qui fut pendant un siècle une science d'observation. Ce fut la troisième période.

Au 20e siècle, l'Astronomie physique avait amassé assez de documents pour essayer de les analyser, de les coordonner par des déductions mathématiques. C'était la quatrième période, celle de la science définitive. De nouvelles lois physiques, analogues à celle de Newton, à la fois mathématiques et expérimentales, comme la loi des gaz réels, celle du rayonnement de Stefan, la pression de radiation, venaient en même temps permettre de fonder sur des bases solides cette étude mathématique des problèmes d'Astronomie physique, permettre d'aborder scientifiquement l'étude de ces problèmes fondamentaux de la constitution, de l'évolution et de la formation des

astres. Nous verrons ici les principaux travaux effectués dans cette voie.

Il semble qu'il y ait là, pour l'astronome français en particulier, tout un champ d'activité féconde, tout aussi important que celui des observations par de petits ou de grands instruments et qui demande moins d'outillage et moins de frais. Il y a même là un double travail de mise au point des travaux antérieurs et de recherches personnelles, qui promet de riches moissons à la fois pour les chercheurs et pour l'Astronomie. Je serais heureux si cet ouvrage attirait l'attention de plusieurs sur ces problèmes.

Car les solutions sont amorcées. Après les tâtonnements du début la voie semble définitivement ouverte, où doit s'engager l'Astronomie de l'avenir, la voie où elle pourra enfin nous expliquer la constitution et l'évolution de notre Univers et de tous les astres multiples et curieux qu'il renferme, expliquer l'évolution de notre Terre et celle de notre humanité, des terres et des humanités, expliquer l'évolution d'hier et nous faire entrevoir celle de demain, l'évolution sans fin de l'Energie dans le monde, celle de la vie et de la pensée dans l'Humanité, celle de la Pensée qui remplit le ciel.

# CONSTITUTION ET ÉVOLUTION DE L'UNIVERS

## CHAPITRE PREMIER

### LES FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE LIQUIDE HOMOGÈNE EN ROTATION. CONSÉQUENCES COSMOGONIQUES.

1. **Importance du problème. Les travaux récents.** — Le problème de la détermination des figures d'équilibre d'une masse liquide en rotation est un des plus intéressants de la Mécanique céleste, et des plus importants pour l'Astronomie. Les noms de nos plus grands mathématiciens y sont attachés, depuis Newton et Laplace, jusqu'à Henri Poincaré.

La question est intéressante par tous les problèmes qui s'y rattachent, qui se trouvent posés, et souvent résolus : l'équilibre et la constitution de l'anneau de Saturne, la forme exacte de la Terre et sa constitution interne, la forme des astres au cours de leur évolution, et leur fractionnement possible, etc.

La question est encore intéressante par les méthodes qui ont été utilisées et qui sont, ou peuvent devenir,

d'une application générale. La théorie du potentiel, élaborée par la mécanique céleste au 18ème siècle, a pu s'appliquer sans modification à la chaleur et à l'électricité. Les fonctions sphériques et les fonctions de Lamé, que nous rencontrons ici, trouvent leur application dans tous les problèmes relatifs aux sphéroïdes et aux ellipsoïdes. Elles peuvent se généraliser pour une surface quelconque et un espace triple ortogonal quelconque, avec applications aux problèmes les plus actuels.

Ce problème comprend deux parties bien distinctes et d'égale importance : le problème des figures d'équilibre d'une masse homogène et le problème de la figure d'une masse hétérogène.

Le premier comprend l'étude des figures ellipsoïdales soit de révolution, soit à trois axes et, les très curieuses figures dérivées des ellipsoïdes, qui ont posé d'une façon plus précise le problème du fractionnement possible en deux masses. On peut étudier mathématiquement et scientifiquement, par cette voie, le problème cosmogonique de la formation des étoiles doubles et des satellites par dédoublement.

Plus récemment encore ces questions ont été renouvelées et ont pris un nouveau regain d'actualité par ce fait que M. Paul Appell, successeur d'Henri Poincaré dans la chaire de Mécanique céleste, leur avait consacré son cours de 1913. Ces leçons ont formé en 1920 le tome quatrième de son *Traité de Mécanique rationnelle*. Ces leçons, interrompues en 1914, n'ont porté que sur la première partie du problème, les figures d'équilibre d'une masse liquide homogène. Ils ont suscité des travaux intéressants de plusieurs de ses élèves.

Ces études ont provoqué partout un grand intérêt. Il

suffit de signaler en particulier, qu'en Italie seulement, en 1921, trois professeurs d'Université avaient pris pour sujet de leur cours l'étude des figures d'équilibre d'une masse fluide.

En Angleterre, le professeur bien connu J. H. JEANS a consacré à l'étude des mêmes questions son grand ouvrage *Problems of Cosmogony*, qui a eu en France, et à l'étranger, un succès considérable. Il y étudie les figures d'équilibre d'une masse homogène et d'une masse hétérogène, et poursuit jusqu'à l'étude du fractionnement possible. C'est le programme même du présent chapitre.

2. **Résumé historique. Les trois périodes.** — NEWTON applique le premier sa loi de la gravitation à l'étude de la figure d'équilibre des astres. Il montre que la force centrifuge, combinée avec la pesanteur, doit donner un ellipsoïde de révolution, aplati aux pôles.

MACLAURIN (*Traité des fluxions* 1742) applique à la masse homogène en rotation le principe de PASCAL sur l'égalité des pressions, avant même que les principes de l'Hydrostatique soient parfaitement établis. Il étend à tous les points de la masse et à toutes les directions le calcul primitif de NEWTON. Il montre ainsi que l'ellipsoïde de révolution est bien une figure d'équilibre, où la résultante des forces est partout normale à la surface. Les figures d'équilibre, qui sont des ellipsoïdes de révolution, portent depuis le nom d'ellipsoïdes de Maclaurin.

SIMPSON en 1743 étudie les conditions d'existence de ces ellipsoïdes, en fait la discussion et établit l'existence d'une vitesse de rotation maximum.

C'est un peu plus tard que LEGENDRE fait connaître sa

méthode fondamentale qui permettra de rechercher directement, avec l'approximation voulue, les figures d'équilibre voisines de la sphère (*Histoire de l'académie des Sciences pour 1789*). C'est à cette méthode de toute première importance en Physique mathématique, que sont dus les progrès les plus récents sur le problème posé ici. Il considère des dénivellations faibles et se donne en chaque point la cote par rapport à la sphère, qu'il exprime en fonctions sphériques.

On a cru pendant longtemps qu'il n'y avait pas d'autres figures d'équilibre que l'ellipsoïde aplati et l'anneau. Il faut attendre jusqu'en 1834 pour voir s'introduire des idées neuves et des solutions nouvelles, qui devaient ouvrir une voie féconde. Jacobi fait remarquer que l'ellipsoïde à trois axes s'exprime par une fonction quadratique des coordonnées de la surface, comme le potentiel de la force centrifuge et l'équation de l'ellipsoïde. Il montre ainsi que les ellipsoïdes à trois axes inégaux, tournant autour du petit axe, peuvent être des figures d'équilibre : ils portent depuis le nom d'ellipsoïdes de Jacobi.

Ce fut un étonnement dans le monde scientifique de constater qu'il pouvait y avoir des figures d'équilibre d'un corps en rotation qui n'étaient pas des figures de révolution.

C'est Liouville (*Journal de math. 1834*) qui a fait l'étude générale et la discussion de ces ellipsoïdes à trois axes, par rapport à la vitesse de rotation et au moment de rotation. Récemment A. Véronnet en a fait une nouvelle discussion en étudiant la variation du grand axe, ce qui donne l'évolution de la grandeur en même temps que de la forme des figures. Mathiessen en 1859 a étudié une

autre figure limite, le cylindre indéfini à section elliptique.

Le problème traité par Liouville fut regardé comme suffisamment résolu et laissé dans l'oubli pendant près de 25 ans.

En 1883 le *Treatise on natural philosophy* de THOMSON et TAIT attire l'attention sur l'allongement et le fractionnement possible des ellipsoïdes de JACOBI. C'est le mémoire de Mme KOWALEVSKI, sur l'anneau de Saturne (1885), qui attire l'attention de POINCARÉ sur ces questions. Il s'occupe d'abord de la question de l'anneau, puis du problème général de TAIT et de THOMSON (*Comptes rendus et Bull. Astronomique* 1885). Dans un travail d'ensemble, il démontre que les ellipsoïdes de MACLAURIN et de JACOBI forment des séries continues possédant une infinité de points de bifurcation discontinus, où apparaissent de nouvelles figures d'équilibre, différentes des ellipsoïdes et donnant naissance à autant de séries nouvelles, ou de rameaux nouveaux. Il calcule la position de ces points, il détermine la forme de ces nouvelles figures, dont la plus simple se rapproche de l'œuf ou de la poire, forme ovoïde ou piriforme. Il en indique l'étranglement possible. C'est l'ensemble de ce travail de tout premier ordre, chef-d'œuvre de Mécanique Analytique, qui a été publié au Tome 7 des *Acta mathématica*, 1885, puis dans les *Leçons sur les figures d'équilibre*. Ces figures d'équilibre, dérivées des ellipsoïdes, portent le nom de figures de POINCARÉ.

A la même époque un Russe, LIAPOUNOFF traitait la même question, aboutissant aux mêmes résultats par une autre méthode, poussait même l'approximation plus loin. G. H. DARWIN a fait les calculs numériques, déterminant

d'une façon précise la forme de la première figure de bifurcation et lui a donné le nom de figure piriforme (*Phil. Trans.*, A. t. 198 : 1902) P. Humbert dans sa thèse de 1918 a montré que les sections principales de la figure piriforme ne présentent pas de points d'inflexion et il a calculé les figures de bifurcation suivantes. J.-H. Jeans a poursuivi l'étude de cette figure jusqu'à la rupture de la forme ovoïde en deux masses distinctes, dont la petite tournera autour de la grande.

Enfin Poincaré et Liapounoff ont étudié tous deux la question plus complexe de la *Stabilité* de ces figures dérivées des ellipsoïdes. La question est restée longtemps controversée pour la première, la fameuse figure piriforme. Elle fut définitivement reconnue instable par J. H. Jeans, qui en a conclut, peut-être un peu vite, à un dédoublement probable. Au point de vue astronomique, tous les astres sont très loin des points critiques de bifurcation et par conséquent plus loin encore d'un fractionnement possible. De plus, en remontant dans le passé, vers leur origine, il faut leur donner un rayon plus grand, une densité plus faible et l'on s'éloigne encore plus des conditions de fractionnement, au lieu de s'en rapprocher.

3. **Figures ellipsoïdales d'équilibre. Première discussion en prenant la vitesse de rotation comme paramètre.** — Soit $\rho$ la densité de la masse, $\omega$ sa vitesse de rotation, $a$ le grand axe et $c$ le petit axe, on a, pour les ellipsoïdes de révolution, la relation suivante entre ces quantités.

$$(1)\quad h = \frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = \frac{(3 + l^2)\operatorname{arc\,tg} l - 3l}{l^3}, \qquad l^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$$

Si on considère la densité $\rho$ comme constante, cette expression donne la vitesse de rotation $\omega$, en fonction de la forme de la figure déterminée par $l$ et réciproquement.

L'expression $l$ varie de o à l'infini, on la remplace avantageusement par $s$, (par $s$ et $t$ pour les ellipsoïdes à trois axes), quantités comprises entre o et 1, qui donnent le rapport des axes et par conséquent l'aplatissement ou l'allongement.

$$(2) \qquad s = \frac{c^2}{a^2}, \qquad t = \frac{c^2}{b^2}.$$

Dans le cas des ellipsoïdes de révolution la variation de $h$ ou de $\omega$ est représentée par la courbe S M O, figure 1,

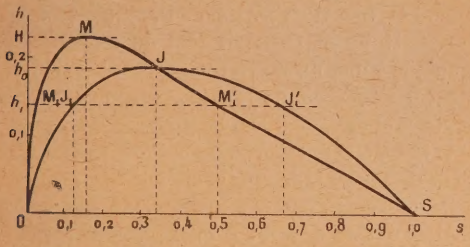


Fig. 1. — Courbes des ellipsoïdes d'équilibre avec vitesse de rotation variable.

où $s$ est en abscisse et $h$ en ordonnée. Quand $s = 1$, les axes sont égaux, on a le cas de la sphère représentée par le point S. Pour $s = 0$ on a le point O et le cas limite du disque aplati, où le petit axe est nul.

Si nous partons de la sphère et que nous augmentions la vitesse de rotation, le point figuratif se déplace de S en M. L'aplatissement augmente avec la vitesse de ro-

tation. On voit même que $h$ et par conséquent $\omega^2$ croît presque linéairement avec $s$ ou $\frac{c^2}{a^2}$. Le rapport des axes est ici sensiblement proportionnel à la vitesse de rotation.

Au point M pour $h = 0{,}224$ la vitesse de rotation passe par un maximum. Elle décroît ensuite alors que l'aplatissement continue à augmenter de M en O. Au dessous de la vitesse de rotation maximum, correspondant à une densité $\rho$, (d'autant plus élevée que $\rho$ est plus grand), il y a donc deux ellipsoïdes d'aplatissements différents pour la même vitesse de rotation, points $M_1$ et $M'_1$ pour la valeur $h_1$.

Tchebytcheff se demandait ce qu'il arriverait si on augmentait la vitesse de rotation au point M, où elle est maximum. Il ne se passerait rien du tout. Ce qu'on communique à une masse en rotation c'est de la quantité de mouvement $I\omega$, ou de l'énergie cinétique $I\omega^2$, or ici en augmentant ces quantités, l'aplatissement, et par conséquent le moment d'inertie I, augmentent davantage encore et $\omega$ est obligé de diminuer, selon la formule. Ce *problème* de Tchebytcheff est cependant à signaler, car il a été le point de départ des recherches de Liapounoff.

Il faut signaler encore que cette formule, appliquée à la Terre et aux planètes, montre qu'elles sont très loin de l'homogénéité. Saturne et Jupiter en sont encore beaucoup plus éloignées que la Terre.

Les ellipsoïdes de Jacobi, à trois axes, sont déterminés par une formule analogue à (1) où $h$ est exprimé en fonction de $s$ et $t$ et une autre relation entre $s$ et $t$ seuls. La variation de ces ellipsoïdes est représentée par les deux portions de la courbe J O et J S, figure 1.

Les ellipsoïdes à trois axes naissent des ellipsoïdes de

révolution au point J *point de bifurcation*, pour $h = 0,187$, au dessous de la vitesse de rotation maximum. Les valeurs de $s$ sont données sur OJ et celles de $t$ sur JS. Chaque valeur $h_1$, de $h$ ou de $\omega$, détermine deux points $J_1$ et $J_1'$, qui donnent les valeurs de $s$ et de $t$ correspondantes.

On voit que pour ces ellipsoïdes à trois axes, la valeur de $h$, ou la vitesse de rotation, est toujours décroissante à partir du maximum J : La valeur de $s$ tend alors vers zéro et $t$ vers 1. La valeur de l'axe moyen se rapproche de celui du petit axe $c$, qui lui-même tend vers zéro avec $s$. L'ellipsoïde à trois axes devient un ellipsoïde allongé, dont le grand axe augmente indéfiniment tandis que les deux autres tendent vers zéro. On a finalement une aiguille indéfiniment allongée et de révolution autour du grand axe.

*En résumé* si on considère une masse sphérique dont la rotation augmente, on obtient des ellipsoïdes de révolution de plus en plus aplatis, jusqu'au point J, où deux sortes de figures d'équilibre sont également possibles théoriquement ; les ellipsoïdes de révolution qui s'aplatissent de plus en plus, dont la vitesse de rotation croît jusqu'à un maximum, pour diminuer ensuite indéfiniment, et les ellipsoïdes à trois axes, qui s'allongent indéfiniment, et dont la vitesse de rotation décroît sans cesse.

Au dessous du point de bifurcation J, où $h_1 = 0,187$, nous avons pour une même vitesse de rotation, trois ellipsoïdes possibles, deux de révolution et un à trois axes. Entre J et M où $h = 0,224$, il y a deux ellipsoïdes de révolution comme figures d'équilibre possibles. Il n'y a aucune figure d'équilibre pour des valeurs plus grandes de $h$.

4. **Deuxième discussion en prenant le moment de rotation comme paramètre.** — Au point de vue pratique de l'évolution d'un astre qui se refroidit et se contracte, en étant soustrait aux actions extérieures, la somme des moments des quantités de mouvements de toutes les particules reste constante. C'est un *invariant* qui caractérise le système tournant. Il est naturel de prendre ce moment de rotation $\mu = I\omega$, comme paramètre, au lieu de la vitesse de rotation $\omega$. Laplace a fait les calculs dans le cas des ellipsoïdes de révolution, et Liouville pour les ellipsoïdes à trois axes [1].

En remplaçant dans la formule (1) $\omega$ en fonction de $\mu$, on obtiendra une nouvelle fonction $k$, qu'il est facile d'exprimer en fonction de $h$,

$$k = \frac{5\sigma\mu^2}{3fM^3}\left(\frac{4\pi\rho}{3M}\right)^{1/3} = 4h\,(1+l^2)^{2/3} \tag{3}$$

$$k = \frac{(s+t)^2}{(st)^{4/3}}\,h. \tag{4}$$

La première est relative aux ellipsoïdes de révolution, la seconde aux ellipsoïdes à trois axes. L'expression $k$ remplace l'expression $h$ de la discussion précédente. Comme $\mu$ et M sont constants, on voit que la densité $\rho$ varie dans le même sens que $k$ et réciproquement.

On démontre que pour les deux séries d'ellipsoïdes cette fonction croît indéfiniment, quand $s$ décroît de 1 à zéro. La variation est représentée par la figure 2.

La courbe SJM représente la variation des ellipsoïdes de révolution. Le point S représente la sphère. On voit qu'à partir de S, pour les aplatissement croissants, $s$ dé-

[1] *Journal de mathématiques*, t. 16.

croissant, la valeur de $k$ augmente indéfiniment. L'aplatissement augmente indéfiniment avec la densité $\rho$. La limite du disque aplati n'est atteinte qu'avec une densité infinie. On a un ellipsoïde et un seul pour chaque valeur de la densité ou de l'aplatissement. La courbe des ellipsoïdes à trois axes est représentée en $J, J_1, J_1'$. Elle part du point J où l'on a les valeurs [1],

$$s_0 = t_0 = 0{,}339, \quad k_0 = 4 l_0^{-2/3} h_0 = 1{,}537$$

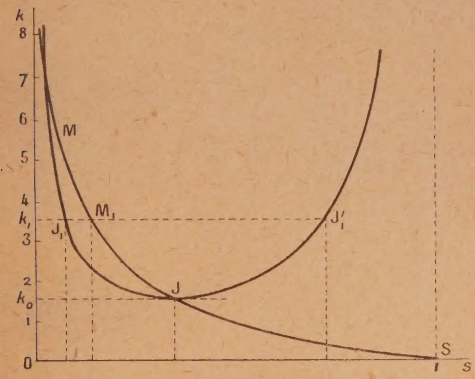


Fig. 2. — Courbes des ellipsoïdes avec le moment de rotation comme paramètre.

Elle est indéfiniment croissante pour $s$ décroissant. On obtient une aiguille indéfiniment allongée quand $k$,

[1] Tisserand donne pour $k_0$ la valeur 0,3643, *Mécanique céleste*, t. 2, p. 107. Ce nombre provient d'une erreur de calcul Il a été conservé dans les *Figures d'équilibre* de M. Appel, p. 75 et rectifié dans le tableau de la page 85.

ou la densité $\rho$, augmente indéfiniment. Pour une valeur $k_1$ de $k$ on obtient les deux points $J_1$ et $J'_1$ qui donnent les valeurs $s$ et $t$ de l'ellipsoïde correspondant,

Si on considère une masse de densité donnée et constante, mais dont on augmente progressivement le moment de rotation $\mu$, on obtiendra la même courbe représentative, qui donnera la variation de $\mu^2$ proportionnel à $k$. On voit sur la courbe S J M des ellipsoïdes de révolution, que leur aplatissemeut augmente indéfiniment avec le moment de rotation et qu'il faudrait un moment de rotation infini, et une énergie de rotation infinie, pour aboutir au disque aplati. Il en est de même pour les ellipsoïdes à trois axes à partir de J.

*En résumé*, pour une valeur de $k$ inférieure à 1,54 il n'y a qu'un ellipsoïde de révolution comme figure d'équilibre. Pour les valeurs de $k$, supérieures à 1,54, il y a un ellipsoïde de révolution et un ellipsoïde à trois axes, comme figures d'équilibre.

5. **Troisième discussion. Variation du grand axe avec moment de rotation constant.** — Dans la discussion précédente, l'expression $k$ contient le moment de rotation $\mu$ et la densité $\rho$. Or, on doit faire varier $\rho$ de zéro à l'infini pour obtenir tout le champ de la variation. Il serait plus intéressant d'avoir la *variation* du grand axe de l'ellipsoïde dans la contraction, au lieu de la densité, on obtient alors la *variation de la grandeur des figures* en même temps que la variation de la forme. On peut calculer les éléments réels correspondant aux différents cas et aux différentes formes. On peut en déduire des conclusions intéressantes sur l'évolution et la possibi-

lité des dédoublements avec application à la Terre et aux étoiles doubles.

Cette nouvelle discussion a été faite par A. VÉRONNET [1], puis presque en même temps par H.-G. PLUMMER [2].

En remplaçant dans les formules (3) et (4) $\rho$ en fonction de $a$, au moyen des relations qui donnent M, on obtient, pour les ellipsoïdes de révolution de MACLAURIN,

$$g = \frac{5o}{3\pi M^3}\frac{\mu^2}{a} = 4h\sqrt{1+l^2}, \tag{5}$$

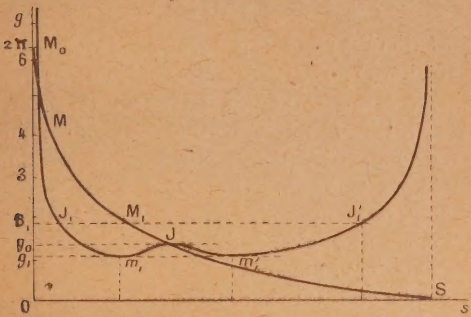


Fig. 3. — Courbes des ellipsoïdes avec variation du grand axe.

et pour les ellipsoïdes à trois axes de Jacobi.

$$g = \frac{5o}{3\pi M^3}\frac{\mu^2}{a} = \frac{(s+l)^2}{sl}\frac{h}{\sqrt{l}}. \tag{6}$$

Ces expressions $g$ remplacent celles de $h$ et de $k$. La variation en fonction de $s$ est représentée par la figure 3.

La courbe SJM représente la variation des ellipsoïdes

[1] *Journal de math.*, p. 211-247 (1919) et *Comptes Rendus*, t. 169, p. 320 (Août 1919).

[2] *Monthly Notices* p. 26-33, t. 80 (nov. 1919).

de révolution. A partir de la sphère, point S, la valeur de $g$ croît sans cesse avec l'aplatissement. Mais cette expression tend vers une valeur finie $2\pi$, à la limite. C'est-à-dire quand l'ellipsoïde tend vers un disque aplati. La densité serait d'ailleurs infinie à cette limite. Il s'ensuit ceci de remarquable, que le grand axe $a$ décroît sans cesse avec l'aplatissement, d'après (5) et tend vers une *valeur finie* $a_0$ donnée par

$$a_0 = \frac{25}{3fM^3}\frac{\mu^2}{\pi}.$$

La variation *des ellipsoïdes à trois axe* est plus curieuse encore. Ils bifurquent des ellipsoïdes de révolution au même point J pour $s_0 = t_0 = 0{,}3396$. La valeur de $g$ est alors $g_0 = 1{,}276$. Elle décroît d'abord jusqu'à un minimum $g_1 = 1{,}18$ en $m_1$ et $m_1$ pour croître ensuite indéfiniment à mesure que l'ellipsoïde s'allonge. Pour $g$ compris entre $g_1$ et $g_0$ on a deux ellipsoïdes à trois axes, qui ont la même valeur de $g$, c'est-à-dire le même grand axe $a$, mais des axes $b$ et $c$ différents.

Il en résulte ceci de remarquable qu'à partir du point de bifurcation J, le grand axe $a$ de l'ellipsoïde à trois axes, croît d'abord, bien que cet ellipsoïde se contracte, passe par un maximum, puis décroît ensuite indéfiniment. Ici le grand axe ne tend plus vers une limite finie, mais vers zéro. L'aiguille allongée, limite de ces ellipsoïdes, est indéfiniment évanouissante.

6. **Applications à la Terre et aux planètes.** — Pour de faibles aplatissements $e$, en développant l'expression de $g$ on obtient

$$(7) \qquad g = \frac{16}{15}l^2 \ldots = \frac{32}{15}e \ldots \quad \text{et} \quad \frac{\mu^2}{ae} = \frac{3fM^3}{25\pi} = C^{te}$$

Ainsi pour de *faibles aplatissements*, et dans le cas où le moment de rotation reste constant, *l'aplatissement varie en raison inverse du rayon équatorial* et réciproquement. Pour la Terre, par exemple, il faudrait qu'elle se contracte, jusqu'à un rayon moitié moindre pour que son aplatissement devienne double de ce qu'il est actuellement. Il serait encore très petit et voisin de 1/150. La densité du globe serait alors huit fois plus grande, soit 44 fois celle de l'eau. L'aplatissement de la Terre ne pourrait donc pas atteindre cette limite.

En supposant la Terre et la Lune, réunies en une seule masse, avec leur quantité de mouvement total, soit 4,82 fois celui de la Terre, l'aplatissement ne serait encore que de 1/12, c'est-à-dire de l'ordre de celui de Jupiter. Le point figuratif serait en L, où $g = 0{,}367$ figure (3). Nous serions très loin de la bifurcation J, où $g = 1{,}28$ et d'un dédoublement possible, même avec un rayon moitié moindre, à plus forte raison avec un rayon plus grand. Ceci rend absolument impossible l'hypothèse de G.-H. Darwin, d'après laquelle la Lune proviendrait d'un fractionnement de la Terre, quand elle avait un rayon égal à une fois et demi le rayon actuel.

Pour Jupiter on a $g = 0{,}224$ et pour Saturne 0,397. Pour atteindre le point de bifurcation J il faudrait que Jupiter se contracte jusqu'à un rayon 5,7 fois plus petit et Saturne 3,2 fois plus petit. La densité serait 3,186 et 5,5 fois plus grande.

Si l'on calcule ce que devient la Terre, supposée homogène, à la limite d'aplatissement, on trouve qu'elle se réduirait à un disque de 9,4 km de rayon faisant 5,35 tours par seconde [1]. En supposant la Lune réunie à la

[1] H.-G. Plummer retrouve les mêmes résultats, *Monthly notices*, t. 80, p. 26.

Terre on aurait un disque de 219 km faisant 2,86 tours par minute.

Pour réaliser l'ellipsoïde de bifurcation, qui conduit aux ellipsoïdes à trois axes, la Terre devrait se contracter de 46 millions de fois son volume. Les axes auraient 46 km et 26,8 km. Elle ferait 13,4 tours par minute. Pour réaliser cette figure avec la densité actuelle il faudrait faire tourner la terre 9 fois plus vite. Les axes auraient alors 7.650 kilomètres et 4.460 kilomètres. L'axe équatorial a environ 6.378 kilomètres actuellement. Pour Jupiter il faudrait lui donner une vitesse double. Pour Saturne il suffirait d'une vitesse de rotation 1,37 fois plus grande qu'actuellement.

7. **Les figures dérivées des ellipsoïdes.** — Nous venons de voir dans les discussions précédentes, qu'en suivant la série des ellipsoïdes de révolution nous avions rencontré en J un point de bifurcation, où les ellipsoïdes à trois axes devenaient possibles, comme figures d'équilibre et donnaient une nouvelle branche, une nouvelle série continue, qui évolue depuis l'ellipsoïde de révolution aplati, jusqu'à l'ellipsoïde de révolution allongé en forme d'aiguille.

Poincaré a compris l'importance de ce point de bifurcation. Il s'est posé le problème de savoir s'il n'y avait pas, sur la courbe des ellipsoïdes de révolution, et aussi sur celle des ellipsoïdes à trois axes, d'autres points de bifurcation, donnant d'autres figures, qui seraient dérivées de ces ellipsoïdes et qui s'en éloigneraient, tout en restant des figures d'équilibre. Il a pu démontrer qu'il y avait, en effet tout le long de la ligne des ellipsoïdes de révolution, une infinité de points critiques, et que ces

figures dérivées pouvaient se ranger en trois groupes. Il démontre que la série des ellipsoïdes à trois axes n'est pas autre chose que la première et la principale de ces séries dérivées, sur laquelle on retrouve encore une autre infinité d'ellipsoïdes critiques, ou de bifurcation, et de figures dérivées.

Il a indiqué aussi dans quel sens se déformaient les ellipsoïdes de bifurcation, sans pouvoir suivre leur évolution jusqu'au bout, comme on l'a fait pour les ellipsoïdes à trois axes. On ne connaît que le début, ou la direction, de la branche dérivée, sans connaître la suite de leur forme, ni leur point d'aboutissement final. Ces *figures dérivées* sont appelées aussi les *figures de Poincaré*.

Poincaré et Liapounoff ont tous deux résolu le problème général au moyen des *fonctions de Lamé*, qui sont une généralisation des fonctions sphériques, étendues aux ellipsoïdes.

Pour qu'un ellipsoïde donne naissance à une figure voisine, qui soit encore une figure d'équilibre, le potentiel de la couche de déformation infiniment mince introduit la condition générale suivante très simple :

$$\frac{R_k S_k}{2n+1} = \frac{R_1 S_1}{3} \tag{8}$$

où $R_k$ est une des $2n+1$ fonctions de Lamé d'ordre $k$, fonction de première espèce. Les $S_k$ sont les fonctions correspondantes de seconde espèce.

Dans le cas des ellipsoïdes de révolution ces fonctions dégénèrent en fonctions sphériques et $R_k$ sera un polynôme sphérique $X_n^{(k)}$ d'ordre $n$. La relation ci-dessus détermine l'aplatissement, c'est-à-dire la forme de l'ellipsoïde de bifurcation correspondant à chaque valeur de

$n$ et de $p$. On obtient les *figures à cannelures*, où les ellipsoïdes sont alternativement renflés et déprimés sur des zones comprises entre deux parallèles pour $p = 0$ ; les *figures à fuseaux*, où les renflements et dépressions se produisent entre deux méridiens, pour $p = n$; enfin les *figures à réseaux*, où les renflements ont lieu à la fois le long des parallèles et des méridiens. La première figure à cannelures est représentée par la figure 4 et aboutirait à l'étranglement en anneaux de l'expérience de Plateau.

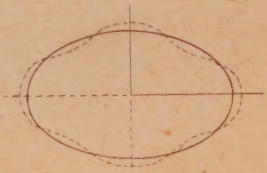

Fig. 4. — Première figure à cannelure donnant l'anneau de l'expérience de Plateau.

Dans le cas des ellipsoïdes à trois axes il n'y a, pour chaque valeur de $n$, qu'une seule valeur de R qui soit solution et un seul ellipsoïde de bifurcation.

Le premier ellipsoïde de bifurcation et la première figure dérivée se trouvent pour $n = 3$. Le point correspondant est en $J_1$ figure 1. La valeur correspondante de $h$ est 0,14. En prenant le grand axe C comme unité, on a pour les deux autres axes.

$$A = 0.3451 \qquad B = 0,4823$$

Cet ellipsoïde de bifurcation est déjà très allongé, puisque l'axe de rotation A n'est que le tiers du grand

axe et l'axe moyen B, moins de la moitié du même axe.

La figure 5 représente la courbe schématique de POINCARÉ, qui ne croyait pas l'ellipsoïde critique

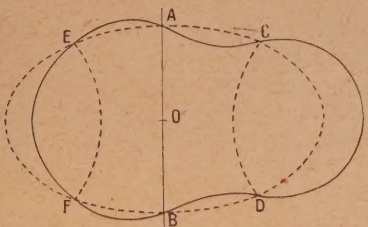


Fig. 5. — Figure schématique de la figure piriforme donnée par POINCARÉ.

aussi allongé [1]. Il croyait également que la figure dérivée se creusait entre AC et BD et pouvait aller en s'étranglant.

Cependant G.-H. DARWIN a déterminé par le calcul la

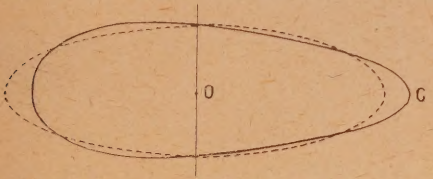


Fig. 6. — Figure tracée par G.-H. DARWIN de la figure piriforme et de son ellipsoïde de bifurcation.

forme de l'ellipsoïde et de la figure dérivée. La section normale suivant le grand axe OC est représentée figure 6.

[1] Figures d'équilibre d'une masse fluide, p. 161.

L'ellipsoïde est en pointillé et la figure piriforme ou ovoïde en traits fins pleins [1]. Il n'y a pas de point d'inflexion et par conséquent pas d'étranglement. M. P. HUMBERT a

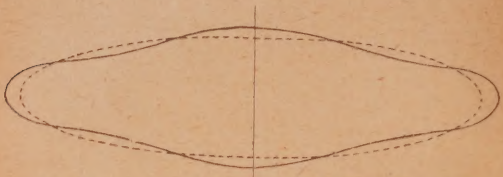

Fig. 7. — Deuxième figure de POINCARÉ.

démontré théoriquement que la figure dérivée n'a pas de point d'inflexion, même pour des valeurs considérables de la déformation.

La valeur $n = 4$ détermine un second ellipsoïde de bifurcation dont les axes, rapportés au grand axe sont égaux à 0,257 et 0,297. Selon que la déformation aux extrémités

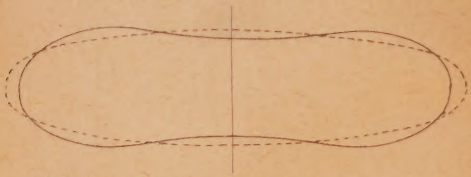

Fig. 8. — Deuxième figure de POINCARÉ d'ordre 4 L'haltère.

du grand axe est positive ou négative, on obtient deux figures différentes, figure 7 et 8, la figure positive en forme d'haltère, qui pourrait s'étrangler au milieu, et la

[1] *Scientific papers*, p. 314. G. H. DARWIN.

la figure négative, qui pourrait s'étrangler aux deux extrémités, pour donner deux satellites d'un corps central plus gros.

8. **La stabilité des figures d'équilibre.** — Aux points de bifurcation déterminés ci-dessus, nous avons deux figures d'équilibre possibles théoriquement. Sont-elles stables toutes deux ? seront elles instables ? L'une sera-t-elle stable, l'autre instable ? Autant de questions nouvelles qui se posent.

Par exemple en partant de la sphère, l'ellipsoïde peu aplati est stable. Quand nous arrivons à la bifurcation des Jacobi, deux figures sont également possibles, l'une qui reste de révolution l'autre qui est à trois axes. Pratiquement, quelle sera la figure qui sera *le plus en équilibre* ? celle qui *réellement* sera adoptée par le liquide en rotation, si sa densité, ou si son moment de rotation augmente ? Il y a deux chemins qui se présentent. Lequel va suivre notre ellipsoïde ? Quelle sera sa ligne de plus grande pente, où les forces qui agissent sur lui vont l'engager.

Le problème n'est pas aussi simple que pour un point, ou un solide, car on a une infinité de points libres. Au point de vue pratique, c'est cependant tout le problème des figures d'équilibre. On ne cherche pas quelle figure *pourrait* prendre un liquide en rotation, *mais quelles figures il prendra réellement*, dans telles conditions, au cours de sa condensation par refroidissement, par exemple.

Ce problème reste encore obscur malgré les travaux des plus éminents mathématiciens, à cause des forces nouvelles introduites par les déformations.

Tait et Thomson avaient en 1883 renouvelé toute la question en la précisant. Ils ont distingué les forces *positionnelles*, qui ne dépendent que des distances et donnent des systèmes *conservatifs*, où l'énergie se conserve. Ils ont considéré des forces *motionnelles*, les unes *dissipatives*, opposées à la vitesse, et les autres *gyroscopiques*, normales à la vitesse. Ces dernières forces peuvent rétablir l'équilibre, menacé par les forces dissipatives. Ils ont distingué encore la *stabilité séculaire*, ou permanente, et la *stabilité temporaire* ou instantanée. Cette dernière sera permanente si aucune force dissipative ne vient la détruire. Une toupie tournerait indéfiniment, en équilibre stable, si aucun frottement ne venait détruire son énergie de rotation.

Poincaré a appliqué ces principes à la stabilité des figures d'un liquide en rotation. Il a d'abord restreint le problème, au cas de l'équilibre absolu, par rapport à des axes fixes. Il a établi des résultats nouveaux sur les équilibres de bifurcation et l'échange des stabilités, dans le cas d'une fonction à une seule variable. Il a étendu ensuite ces résultats au cas de l'équilibre relatif, par rapport à des axes tournant avec le liquide, et pour un système dont la position dépend d'un nombre infini de variables.

Poincaré a démontré ensuite que les ellipsoïdes de révolution étaient stables jusqu'au point de bifurcation J. Ensuite ce sont les ellipsoïdes à trois axes qui sont stables jusqu'à la figure piriforme.

D'ailleurs les ellipsoïdes de révolution conservent toujours leur stabilité instantanée et comme pratiquement, pour un astre isolé, aucun frottement n'intervient, ni interne ni externe, la stabilité d'un astre homogène serait une stabilité permanente, aussi bien que celle des

ellipsoïdes à trois axes. La figure 9 est la reproduction de la figure 2 avec les points de bifurcation et les courbes des figures dérivées. En $M_0$, (ou $M'_0$) est la bifurcation de la figure piriforme, en $J_2$ celle de l'haltère.

Poincaré avait donné les formules qui permettaient de déterminer si la figure piriforme était stable. G. H. Darwin, qui avait fait les calculs numériques,

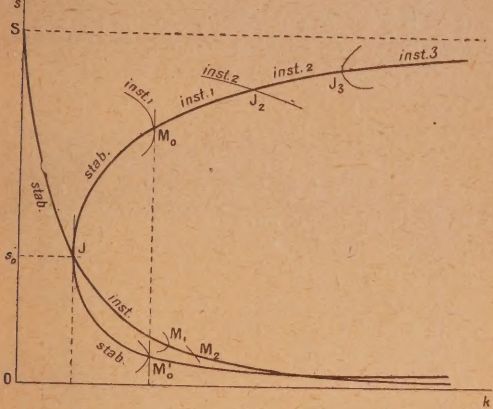


Fig. 9. — Représentation des points de bifurcation et des stabilités,

sans les pousser jusqu'au bout, avait conclu qu'elle était stable. Liapounoff, par une méthode directe, démontrait qu'elle était instable. J.-H. Jeans a repris les calculs de Darwin en seconde approximation, a montré que la première approximation donnait un résultat indéterminé, et qu'il y avait réellement instabilité. La stabilité reste temporaire. Pour les figures correspondant à $n = 4$ la figure positive est instable, l'autre stable.

9. **L'Hypothèse d'un dédoublement et la cosmogonie.** — LAPLACE expliquait la formation des anneaux et des planètes par la force centrifuge, accrue par la contraction due au refroidissement. G.-H. DARWIN a expliqué de même le détachement de la Lune et des autres satellites, les étoiles doubles, etc. Il y a bien des difficultés à réaliser pratiquement ce dédoublement.

Pour qu'il y ait dédoublement dans un cas quelconque il faut de toute nécessité, et comme condition primordiale, que la force centrifuge devienne égale à l'attraction. Or A. VÉRONNET a démontré que pour une masse homogène, et pour tous les ellipsoïdes à trois axes ou de révolution qui sont figures d'équilibre, l'attraction était toujours supérieure à la force centrifuge. Il a démontré qu'il en était de même pour les ellipsoïdes de révolution hétérogènes, à densité variable, avec vitesses internes variables, d'une façon quelconque [1].

Ces deux forces tendent à devenir égales seulement aux limites, quand les ellipsoïdes de révolution tendent vers un disque infiniment plat, quand les ellipsoïdes à trois axes tendent vers une aiguille allongée, dont toutes les dimensions tendent vers zéro. Il faudrait pour qu'un dédoublement soit possible, que la force centrifuge tende à égaler l'attraction, *avant* que les dimensions ne tendent vers zéro. Rien ne prouve que la condition sera plus facilement réalisée par les figures dérivées des ellipsoïdes, que pour les ellipsoïdes eux-mêmes, et c'est ce qu'il faudrait avant tout établir.

Cette condition serait peut-être plus facilement

[1] Rotation de l'ellipsoïde hétérogène. *Journal de math.* p. 348. (1912) et Figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide en rotation, *J. de math.* p. 223 (1919).

réalisée du côté des ellipsoïdes de révolution, car l'une des dimensions au moins reste finie, mais ces figures ne nous donnent que des anneaux comme dans l'expérience de PLATEAU. Pour avoir un fractionnement en deux ou trois composantes, il faut s'adresser aux ellipsoïdes à trois axes. Nous revenons à la figure piriforme et à la figure en haltère. On n'a pas démontré que l'action de la force centrifuge est suffisante, ni qu'elle est supérieure à celle des ellipsoïdes.

Remarquons encore que dans l'expérience de PLATEAU les palettes fournissent à la sphère d'huile une énergie de rotation et un moment de rotation toujours croissants, tandis que dans la contraction le moment de rotation reste constant et l'énergie cinétique qui lui est lié, peut bien rester insuffisante pour effectuer le travail de dédoublement.

On a vu au n° 3 comment le grand axe pouvait être relié au moment de rotation par les formules (5) et (6) et comment la valeur de $g$ pouvait nous indiquer à quel point tel ou tel astre pouvait se rapprocher d'une figure de bifurcation. Ainsi la Terre, en lui ajoutant le moment de rotation de la Lune, n'aurait qu'un aplatissement de 1/12, voisin de celui de Jupiter. La valeur correspondante de $g$ serait 0,367. Les valeurs qui correspondent à Jupiter et à Saturne seraient 0,224 et 0,397, donc du même ordre. La valeur de $g$ au premier point de bifurcation serait 1,276. Les planètes en sont donc toutes très loin, plus loin encore de la figure piriforme et d'un dédoublement possible. Les calculs de DARWIN montrent que la Lune n'a pu se séparer de la Terre que pour un rayon terrestre égal à 2,5. Mais avec un tel rayon on s'éloigne encore davantage des conditions de bifurcation.

En remontant dans le passé la densité serait moindre et on s'éloignerait encore des conditions où le dédoublement serait possible.

J.-H. JEANS, qui a repris les calculs de DARWIN sur les figures piriformes et démontré leur instabilité, a conclu également au dédoublement possible dans son ouvrage *Problems of cosmogony*. Mais il faut bien remarquer qu'il s'agit seulement d'une instabilité du premier degré, que la stabilité se maintient, s'il n'y a pas de frottements, comme c'est le cas pour une masse isolée, enfin que l'instabilité ne signifie pas du tout le fractionnement, mais seulement le changement de forme [1].

De plus, si on suppose le dédoublement réalisé, à partir d'une certaine figure dérivée d'un ellipsoïde, on montre facilement que chacune des composantes devrait se dédoubler de nouveau, quand elle se sera condensée de manière à réaliser les mêmes conditions dynamiques, la même valeur de $g$. Si l'on introduit dans l'expression $g$ les valeurs de $\mu$ et de M correspondant à l'une des composantes, on voit que cette composante retrouvera la forme ellipsoïdale aboutissant au dédoublement, au plus tard quand la valeur de son grand axe sera le 1/6 de celle de la première figure. Si une étoile double provenait

[1] D'ailleurs JEANS considère le cas réel d'une masse hétérogène, comme compris entre le cas d'une masse homogène et le cas d'une atmosphère de masse négligeable, considéré par ROCHE. C'est dans ce dernier cas seulement qu'il y a sûrement émission de particules dans le plan équatorial, mais c'est à une distance considérable de l'astre central, sous forme de poussière météorique. Il y a loin de ce cas limite spécial à la formation d'un satellite. On aurait tout au plus l'anneau de Saturne. Conclure de ce cas limite au fractionnement dans le cas général d'une masse hétérogène est encore plus aléatoire.

d'un fractionnement de cette sorte ou devrait donc retrouver chaque fois d'autres composantes, au moins tous les sixièmes de leur distance, ce qui n'est pas.

La formule en $g$ et $a$ donne, pour la distance des planètes une loi exponentielle analogue à celle de Bode,

$$r_n = r_0 \, x^n$$

où $n = 0$ pour Neptune, 1 pour Uranus, etc. On obtient le tableau suivant pour les valeurs réelles et calculées. La dernière ligne donne les distances des satellites de Jupiter en prenant celle de Ganymède comme unité.

| | Merc. | Vén. | Ter. | Mars | Pet.pl | Jup. | Sat. | Ur. | Nep. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_n$ | 0,36 | 0,62 | 1,07 | 1,85 | 3,18 | 5,48 | 9,45 | 16,3 | 28,0 |
| réels | 0,39 | 0,72 | 1,00 | 1,52 | 2,75 | 5,20 | 9,55 | 19,2 | 30,0 |
| Jup. | 0,39 | 0,63 | 1,00 | 1,76 | — | 10,7 | 1,10 | 22,0 | 28,6 |

D'autres auteurs Gaussin, Belot, Armellini ont présenté des formules analogues, basées sur d'autres hypothèses. On voit par là que des hypothèses totalement différentes peuvent aboutir aux mêmes résultats, ce qui montre que la vérification des faits ne suffit pas pour légitimer une hypothèse.

J.-H. Jeans conclut d'ailleurs que la théorie rotationnelle de la fragmentation ne peut pas expliquer la formation du système solaire, ou d'une partie, et cela pour trois raisons. La densité limite serait trop faible. La matière serait émise d'une façon continue et n'aurait pas pu se condenser. Les masses formées auraient dû être beaucoup plus considérables.

Il pense qu'il y a deux cas seulement où la rotation

aurait pu détacher d'autres masses. C'est dans le cas où le moment cinétique serait beaucoup plus grand que dans notre système, comme par exemple dans les étoiles doubles. Dans le cas aussi où la masse serait beaucoup plus grande comme pour les nébuleuses spirales [1].

Mais pour les étoiles doubles au moins ce moment cinétique est même trop grand car si on les suppose plus rapprochées, avec le même moment de rotation, la force centrifuge l'emporterait sur l'attraction bien avant qu'on les réunisse.

[1] The part played by rotation in cosmic évolution. M. N. v. 77. p. 186-199 (1917).

# CHAPITRE II

## ÉTUDE D'UNE MASSE HÉTÉROGÈNE EN ROTATION FIGURE DE LA TERRE ET DES PLANÈTES

1. **Le Problème, Résumé historique.** — Le problème d'une masse homogène en rotation a pu être résolu assez complètement, comme on l'a vu dans le chapitre précédent. Il n'en est plus de même quand la masse est hétérogène, à densité variable, sauf toutefois pour le cas où la vitesse de rotation est faible, ce qui est le cas pratique pour les astres connus.

M. Hamy a démontré qu'une masse hétérogène, tournant tout d'une pièce ne pouvait pas prendre une forme rigoureusement ellipsoïdale. Il a, ainsi que A. Véronnet, étendu quelques uns des résultats précédents aux ellipsoïdes hétérogènes.

L'étude mathématique du problème, appliqué à la Terre a permis d'en déduire avec une précision de plus en plus grande les limites de l'applatissement, la forme exacte avec ses irrégularités, même de donner certaines indications sur la constitution interne et l'état des vitesses. Souvent les résultats mathématiques ont paru se trouver en contradiction avec les résultats d'autres mesures, ce qui posait de nouveaux problèmes et suscitait de nouveaux travaux intéressants.

La Terre nous paraît plate et cependant elle est ronde et déjà Eratosthène avait mesuré son rayon avec assez de précision. Au 16e siècle Fernel le mesure en France

à un millième près. La triangulation et la géodésie permettent bientôt de comparer les différents rayons mesurés et de déterminer ainsi l'aplatissement.

Newton avait démontré par le calcul que la Terre devait être aplatie aux pôles et renflée à l'équateur. Cassini, directeur de l'Observatoire de Paris, au 18e siècle, en se basant sur des mesures géodésiques trop voisines, en avait conclu que c'était le contraire qui était vrai. Il fallait en conclure alors que les calculs des mathématiciens étaient faux... ou que la Terre ne tournait pas. C'est un exemple du danger qu'il peut y avoir, à vouloir trop déduire de découvertes trop récentes [1]. L'Académie des sciences envoya alors les deux missions géodésiques du Pérou et de l'Equateur, qui vérifièrent l'aplatissement de la Terre et les conclusions des mathématiciens.

La théorie mathématique ne s'appliquait d'abord qu'à une masse homogène. Ce fut Clairaut qui l'étendit alors à une masse hétérogène dans sa *Théorie de la figure de la Terre* (1742). Il précise et simplifie le problème qui porte depuis le nom de problème de Clairaut. Il détermine les limites de l'aplatissement d'après le rapport de la force centrifuge à l'attraction et d'après la variation en latitude de l'attraction. D'Alembert y ajoute bientôt la considération des rapports des moments d'inertie, qui intervient dans la théorie de la précession. C'était une nouvelle relation importante, où rentrait également l'aplatissement [2].

[1] Au 20e siècle on a eu des exemples aussi de cette hâte trop fébrile à vouloir faire intervenir partout radioactivité et relativité.

[2] Recherches sur différents points importants du système du monde, t. 2, p. 201.

LAPLACE donne $\frac{1}{335}$ pour l'aplatissement déduit des mesures géodésiques faites pour l'établissement du mètre. BESSEL, (1841) donne la première détermination sérieuse 1/299 [1].

Quarante ans après (1880), CLARKE en Angleterre, FAYE en France trouvent, pour l'inverse de l'aplatissement, deux nombres voisins 293 et 292, mais différents de celui de BESSEL. Ces nombres étaient appuyés sur des mesures géodésiques considérables et sur les mesures du pendule. Ils furent adoptés à peu près universellement.

En 1885 POINCARÉ utilisait une transformation de l'équation de CLAIRAUT, faite par RADAU, pour démontrer que l'inverse de l'aplatissement ne pouvait pas être inférieur à 298, quelle que soit la loi des densités à l'intérieur de la Terre, dans l'hypothèse toutefois où elle tournerait tout d'une pièce. C'était le conflit entre le calcul et les mesures.

HELMERT (1900) recommence, au moyen d'une nouvelle hypothèse, les calculs et interpétations des mesures géodésiques, (hypothèse de la condensation) et donne le nombre 297. HAYFORD en 1909 trouve un nombre analogue. C'était de nouveau le triomphe des mathématiciens.

Mais ce triomphe n'était pas complet, car le calcul n'avait porté que sur la première approximation et FAYE

[1] Il donne même 299, 1528 avec 7 chiffres exacts pour l'inverse de l'aplatissement. On donne modestement 297 avec une décimale douteuse. On sait que l'aplatissement est la différence des deux axes, équatorial et polaire, divisée par le premier. La différence est de 21 km environ. Le nombre de BESSEL supposait que la longueur des axes était connue à un centimètre près. Nous en sommes encore très loin.

avait montré déjà que le carré de l'aplatissement négligé pouvait faire varier de 6 unités le nombre donné par le pendule, transformer 292 en 298 ou réciproquement [1].

Les calculs de seconde approximation avaient été faits par Airy, G.-H. Darwin, Callandreau et appliqués par eux au problème de Clairaut. Helmert s'en sert pour corriger les déterminations données par le pendule. Il trouve 298. La limite de Poincaré était vérifiée de nouveau.

A. Véronnet applique dans sa thèse les calculs de seconde approximation au problème de Poincaré. Il détermine d'abord une seconde limite très voisine de celle de Poincaré, également indépendante de toute loi de densité, de sorte que l'inverse de l'aplatissement, en première approximation, est compris entre 297,10 et 297,40. En seconde approximation ces nombres sont peu modifiés. La valeur reste comprise entre 296,7 et 297,5. La troisième approximation ne modifie pas le 4e chiffre.

Les calculs numériques et pratiques de l'aplatissement donné par toutes les lois de densités connues ont été également faits dans le même travail. On obtient des nombres encore plus voisins l'un de l'autre. Pratiquement en toute approximation on obtient 297,20, à 0,02 près. Ce nombre ne dépend que du coefficient de précession et du rapport de la force centrifuge à l'attraction, connus avec 5 chiffres exacts.

Ces calculs supposent de plus que la Terre est fluide, en équilibre hydrostatique, et tourne tout d'une pièce. Le travail cité donne encore les calculs théoriques et pratiques, dans le cas d'une Terre solide, ou dont la vitesse des couches internes varie d'une façon quelconque, et

[1] Cours d'Astronomie de l'Ecole Polytechnique, p. 236.

donne les aplatissements correspondants. Si la limite de Poincaré est vérifiée, pour la géodésie, comme elle semble l'être, on en conclut que la Terre tourne tout d'une pièce. L'action de freinage dû aux marées est insensible. Ou bien alors la viscosité et le frottement interne seraient énormes. Cette dernière hypothèse est combattue par les calculs de Jeffreys d'après lesquels les mouvements du pôle seraient complètement amortis dans le cas d'un frottement interne sensible.

**2. Calculs généraux sur l'ellipsoïde hétérogène.** — Nous avons vu dans le chapitre précédent comment le problème de la forme d'équilibre d'une masse *homogène* en rotation avait pu être étudié à peu près complètement. On a pu faire la discussion complète de l'évolution des formes ellipsoïdales dans trois cas différents, étudier la forme et le nombre des figures qui peuvent dériver de ces figures ellipsoïdales, déterminer enfin la stabilité des unes et des autres.

Dans le cas d'une masse hétérogène on est beaucoup moins avancé. Le problème n'est qu'ébauché. Il comporte quelques résultats généraux intéressants et la discusion à peu près complète des formes ellipsoïdales de révolution, dans le cas où il n'y a pas contraction, c'est-à-dire dans le cas relatif à la même masse, dont on modifie seulement la vitesse de rotation.

Les premiers résultats ont été obtenus par H. Poincaré et Volterra, qui ont démontré que les surfaces de niveau d'une masse hétérogène tournant tout d'une pièce ne pouvaient pas être des ellipsoïdes homothétiques. M. Hamy a démontré que ces surfaces ne pouvaient jamais être des surfaces rigoureusement ellipsoïdales.

Il a obtenu ce résultat, et d'autres aussi importants, par l'emploi d'une méthode élégante, qui permet de ramener l'étude d'une masse hétérogène ellipsoïdale à celle d'un ensemble d'ellipsoïdes homogènes, et de leur appliquer ainsi plus facilement les formules et les résultats relatifs à ces derniers.

M. Hamy avait considéré des couches discontinues, en nombre limité, et fait les calculs pratiques pour trois couches. A. Véronnet a repris les démonstrations dans le cas général de la variation continue de la densité, et montré que les formules établies par la méthode de M. Hamy se ramènent à celles de la méthode classique pour une simple intégration par parties. C'est bien le même problème, pris sous une autre forme, qui est plus pratique.

Dans le cas des ellipsoïdes de révolution M. Hamy a fait une discussion générale dans le cas particulier, où les surfaces de niveau internes sont toutes homofocales. La vitesse de rotation est alors la même sur tous les parallèles d'une même surface de niveau. A. Vèronnet a étendu cette discussion au cas des surfaces homothétiques, et calculé la variation de vitesse du pôle à l'équateur sur une surface de niveau quelconque. Il a démontré en outre que, pour les ellipsoïdes de révolution au moins, la force centrifuge ne pouvait jamais égaler l'attraction.

Le rapport des axes et la figure extérieure d'équilibre d'une masse hétérogène, dont les surfaces de niveau, sont homofocales, est la même que celle d'une masse homogène de *même densité moyenne*, tournant tout d'une pièce avec la même vitesse que les couches superficielles de la première.

Il en est de même pour la surface de niveau centrale

des ellipsoïdes homothétiques. La fig. 10 représente toutes les courbes de variation en prenant $\omega^2$ en ordonnée et la quantité $l$ comme abscisse, Voir formule (1) n° 3 ch. 1.

Le maximum de la vitesse de rotation dans le cas d'une masse homogène a lieu pour $l = 2{,}53$.

Les courbes de 1 et 1′ sont celles de la surface extérieure et de la surface centrale dans le cas où les surfaces

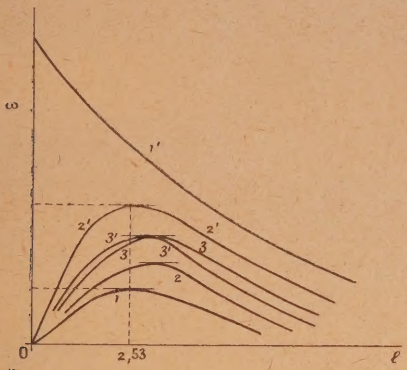


Fig. 10. — Courbes représentatives des vitesses de rotation et de l'aplatissement des surfaces internes d'un ellipsoïde hétérogène, 1 à 1′ cas des surfaces homofocales; 2 à 2′ cas des surfaces homothétiques; 3 à 3′ cas des vitesses uniformes.

internes équipotentielles sont homofocales. Les courbes 2 et 2′ dans le cas des surfaces homothétiques et 3 et 3′ dans le cas où la vitesse de rotation, comptée sur l'axe polaire, est la même du centre à la surface. Les courbes 1 et 2′ sont celles relatives à un ellipsoïde homogène, où la densité serait égale à la densité moyenne pour 1, à la

densité centrale pour 2'. Dans le cas d'une rotation uniforme les courbes sont plus voisines et intermédiaires entre ces deux courbes relatives à un ellipsoïde homogène.

Cette discussion n'a été faite que pour le premier cas, c'est-à-dire en maintenant la densité constante. Il serait intéressant également de l'étendre aux deux autres cas, d'étudier la variation de l'aplatissement et du grand axe quand la masse se contracte en conservant son moment de rotation. La variation doit rester comprise entre celle des deux ellipsoïdes homogènes indiqués, mais cela aurait besoin d'être précisé.

Enfin on a vu qu'un ellipsoïde hétérogène dont les vitesses de rotation tendent à s'égaliser, tend également à se creuser entre le pôle et l'équateur. On verra que cette déformation est infinitésimale pour des rotations lentes, quelques mètres pour la Terre ; mais peut-être pourrait-elle devenir considérable pour les forts aplatissements et concourir à amener la formation d'un anneau analogue à celui de l'expérience de Plateau. La première figure dérivée des ellipsoïdes homogènes de révolution se creuserait plus vite que dans le cas d'une masse homogène.

3. **Le problème de Clairaut. Premières limites de l'aplatissement** — La Terre et les planètes tournent assez lentement, un ou deux tours en 24 heures. Clairaut fut amené à considérer cette vitesse comme assez petite pour pouvoir négliger les éléments du second ordre de la rotation et de l'aplatissement. Cette simplification rendait le problème possible et conduisait à une première approximation. Clairaut donna toutes les formules

pour la solution du problème (1742). Il fut conduit à introduire une seconde hypothèse simplificatrice, c'est que la vitesse de rotation est la même du centre à la surface.

Le problème de Clairaut se ramène donc à étudier la forme d'équilibre des surfaces de niveau, c'est-à-dire l'aplatissement, dans une masse hétérogène, animée d'une vitesse de rotation faible et uniforme.

Clairaut a donné la formule générale qui relie la densité et les aplatissements, ainsi que l'équation différentielle qui s'en déduit et qui porte le nom d'équation de Clairaut.

Il établit entre l'aplatissement $e$ et le rapport $\varphi$ de la force centrifuge à l'attraction, les relations limites.,

$$(2) \qquad \frac{\varphi}{2} < e < \frac{5}{4}\varphi, \qquad \varphi = \frac{1}{288,38}.$$

On en concluait déjà que l'aplatissement devait être compris entre 1/230 et 1/577. Le premier nombre se rapportait au cas de l'homogénéité, le second au cas d'une condensation complète au centre.

Pour la Terre le rapport $\varphi/e$ est égal à 1,03. Il est plus voisin de 4/5 que de 2. La Terre ne peut pas avoir une très forte condensation vers le centre.

Pour Jupiter et Saturne ces rapports atteignent 1,45 et 1,434. Ils se rapprochent de 2. Il doit donc y avoir une condensation prononcée, dans ces deux planètes, comme l'indique d'ailleurs leur faible densité moyenne.

Tisserand [1] a établi une limite un peu plus étroite dé-

[1] *C. R.* t. 99. p. 399 (1884, et *Bul. ast.* t. 1. p. 417 (1884).

pendant du rapport de la densité superficielle à la densité moyenne $D_1$

$$(3) \qquad \frac{2}{5} < \frac{\varphi}{2e} < 1 - \frac{3}{5}\frac{\rho_1}{D_1} < 1$$

Comme $\rho_1$ est sensiblement la moitié de $D_1$ les limites de l'inverse de l'aplatissement sont 230 et 403. Elles sont indépendantes de toute hypothèse sur la répartition des densités, comme aussi sur les vitesses intérieures.

Clairaut démontre que les *aplatissements des couches de niveau sont toujours croissants du centre à la surface, dans une masse fluide hétérogène tournant tout d'une pièce. Les aplatissements varient encore de telle façon que l'expression* $\frac{e}{r^3}$ *est décroissante du centre à la surface.* La quantité $eD$ est également décroissante, D étant la densité moyenne. On a $\frac{e}{r}$ décroissant pour la Terre[1].

Dalembert a donné une formule importante où l'aplatissement est lié au rapport J des moments d'inertie de la Terre, qui se déduit des mesures de précession avec une grande précision. On peut déduire de cette formule les relations,

$$(4) \qquad e_0 < J < e_1 < \frac{1}{2}\varphi + \frac{3}{5}J \qquad J = \frac{1}{305{,}31}$$

$e_0$ est l'aplatissement central, $e_1$ l'aplatissement superficiel. L'inverse de ce dernier est compris entre 270,3 et 305,3 d'après cette nouvelle relation. Le rapport des deux nombres n'est que de 1,13. L'aplatissement est déterminé à 1/8 près. Mais J dépend de l'hypothèse que la terre tourne tout d'une pièce.

[1] Véronnet, Thèse, *Journal de Math.* p. 373. (1912).

Clairaut a déterminé encore la formule de la variation de la pesanteur avec la latitude, qui permet de déterminer l'aplatissement par le pendule.

$$g = g_0(1 + n \sin^2 \theta), \qquad n = \frac{5}{2}\varphi - e \tag{5}$$

Il faut signaler de même la formule de Saigey[1] sur la variation de la pesanteur avec la profondeur.

$$\frac{dg}{dr} = \frac{4}{3}\pi f D \left(3\frac{\rho}{D} - 2\right) \tag{6}$$

La pesanteur croît tant que la densité est plus petite que les $\frac{2}{3}$ de la densité moyenne D. Elle passe alors par un maximum pour décroître ensuite.

La formule de Clairaut montrait déjà que l'aplatissement dépend uniquement de la loi des densités. Hennessy montre en outre qu'il est proportionnel à $\varphi$. Pour deux planètes, où la loi des densités serait la même, les aplatissements seraient proportionnels aux valeurs de $\varphi$. C'est ce qui a lieu pour Jupiter et Saturne à 0,01 près. Au contraire les valeurs relatives à la Terre donneraient pour Jupiter et Saturne un aplatissement trois fois trop faible. Ces deux planètes doivent avoir une condensation centrale beaucoup plus prononcée que la Terre, comme on l'a déjà vu. La courbe des densités doit avoir une inflexion pour pouvoir rendre compte de leur aplatissement. Il y a donc à l'intérieur de ces deux planètes une sorte de noyau plus condensé (A. Véronnet).

4. **Le problème de Poincaré. Première limite théorique.** — Les formules de Clairaut, indiquées au numéro

[1] Petite physique du globe, t. 2. p. 185.

précédent ont constitué pendant un siècle et demi à peu près toutes nos connaissances théoriques sur l'aplatissement de la Terre. Un simple changement de variable, introduit par RADAU, a permis alors à POINCARÉ de déterminer une première limite de l'aplatissement, indépendante de toute loi de densité à l'intérieur de la Terre, et de susciter d'autres travaux des plus intéressants.

L'équation différentielle de CLAIRAUT était du second ordre, en $e''$. Elle s'écrit au moyen de la densité moyenne D, les dérivées étant prises par rapport à $r$, distance au centre.

$$(7) \qquad Dr^2 e'' + 6\rho r e' = 6 (D - \rho) e = -2rD'e$$

RADAU la ramène au premier ordre au moyen de sa fonction $\eta$. On peut y joindre la fonction analogue $\xi$ de TISSERAND,

$$(8) \qquad \eta = \frac{re'}{e}, \qquad \xi = -\frac{rD'}{D} = 3\left(1 - \frac{\rho}{D}\right)$$

Les limites de ces deux fonctions sont données par (9) $\eta_1$ étant la valeur à la surface.

$$(9) \qquad 0 < \eta < \xi < 3, \qquad \eta_1 = \frac{5\varphi}{2e} - 2.$$

L'équation différentielle de CLAIRAUT devient

$$(10) \qquad r\eta' + \eta(\eta + 5) - 2\xi(\eta + 1) = 0$$

Ces formules supposent la rotation uniforme et tout d'une pièce.

En transportant les fonctions $\eta$ et l'expression (10), dans les formules de CLAIRAUT et de DALEMBERT, RADAU

obtient entre l'aplatissement $e$, les valeurs $\varphi$ et J, la relation fondamentale

$$(11) \qquad e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = J + \frac{\varphi}{2},$$

$$K = \frac{1 + \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{10}\eta_1^2}{\sqrt{1+\eta_1}}$$

où K est une valeur moyenne de l'expression ci-dessus en $\eta$. Comme on a $\eta$ compris entre 0 et 3 on voit que K croît d'abord de 1 à 1,00075, valeur maximum, puis décroît ensuite à 0,8.

Radau considère que la valeur probable de $\eta_1$ assigne à K une valeur voisine de l'unité. Il en déduit comme solution[1] : $\frac{1}{e} = 297$. C'était pour lui la seule valeur de l'aplatissement, qui pouvait concorder avec les données expérimentales de la précession et de l'attraction, dans les limites de précision du problème.

Cela supposait implicitement que $\eta$ conservait à l'intérieur une valeur voisine ou inférieure, à celle de la surface, c'est-à-dire supposait que $\eta$ était croissant du centre à la surface et que la Terre tournait tout d'une pièce.

C'est un peu plus tard en (1888) que Poincaré reprend cette démonstration[2] et montre, qu'en dehors de toute hypothèse sur la valeur de $\eta$ à l'intérieur ou à l'extérieur, c'est-à-dire en dehors de toute hypothèse sur la loi des

[1] Radau, *Comptes rendus*, t. 100. p. 972 (1885) et *Bul. astr.*, t. 2 p. 157.

[2] *Comptes rendus* t. 107. (1888) et *Bul. Astr*, t. 6, p. 5 et 49.

densités et la constitution interne de la Terre, on avait, en vertu du maximum de K,

$$K \leqslant 1.00075 \quad \text{et} \quad \frac{1}{e} \geqslant 297.10$$

Cette valeur excluait les aplatissements donnés par Faye et Clarke, Poincaré dans les *Figures d'équilibre d'un liquide en rotation* (1903), p. 96 montrait qu'on pouvait concilier la théorie et les observations soit par un calcul en seconde approximation en tenant compte de $e^2$, soit en admettant que la vitesse des couches intérieures, n'est pas la même que celle de la surface, soit en admettant que la terre est solide et solidifiée avec des vitesses différentes. Nous verrons plus loin l'examen de ces différentes hypothèses, faites par un de ses élèves.

Il faut remarquer à propos de cette limite fondamentale de Poincaré que S. Oppenheim omet complètement d'en parler ainsi que de tous les travaux qui s'y rattachent, dans le numéro consacré à la question dans la grande *Encycopädie der Math., Wiss. B. G.* 2 B. (1922).

5. **Seconde limite théorique de l'aplatissement donnée par A. Véronnet. Calculs numériques.** — Poincaré avait établi sa limite en montrant, qu'en dehors de toute hypothèse sur les densités on avait $K \leqslant 1.00075$. M. Véronnet a démontré que si *la fonction $\eta$ de Radau est croissante à la surface, elle l'est dans toute la masse. Si elle est décroissante à la surface, elle aura un maximum à l'intérieur*. Précisément pour la Terre $\eta$ est croissant à la surface, il en conclut qu'elle est toujours croissante à l'intérieur et que la valeur moyenne de K est supérieure à sa valeur à la surface. Il montre de plus que dans les

mêmes conditions le premier membre de (11) ne peut avoir qu'une solution et l'aplatissement $e$ une seule valeur. On obtient ainsi une seconde limite de l'aplatissement déterminé par la valeur $K = K_1$. La valeur réelle de $e$ devra-être comprise entre ces deux limites, qui sont extrêmement voisines.

Elles sont données par les formules

$$(12)\quad \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{1.00075} < J + \frac{\varphi}{2} - e < \frac{2}{5} J \frac{1+\eta_1}{1+\frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{10}\eta_1}.$$

On calcule les valeurs par approximations successives en donnant à $e$ différentes valeurs et calculant $\eta_1$ par la formule (9). On obtient

$$(13)\quad 297{,}067 < \frac{1}{e} < 297{,}393$$

*En première approximation la valeur de* $\frac{1}{e}$ *se trouve donc déterminée à 0,3 près, indépendamment de toute hypothèse sur la variation des densités et la constitution interne de la Terre.*

Ces valeurs dépendent uniquement des nombres $\varphi$ (attraction) et J (précession). On montre qu'une variation de 0,1 de l'inverse de ces quantités donne la même variation 0,1 pour l'inverse de l'aplatissement.

On a vu que la loi des densités étant donnée, la formule de Clairaut, intégrée du centre à la surface, permettait de déterminer l'aplatissement superficiel en fonction de $\varphi$, c'est-à-dire du rapport de l'attraction et de la force centrifuge, qui crée le renflement équatorial. La formule de Dalembert permet également de le calculer en fonction de J, c'est-à-dire de la constante de préces-

sion, ou de l'action de la Lune sur ce renflement. Tisserand avait montré qu'on aboutissait à des séries hypergéométriques et établi certaines relations. A. Véronnet a pu rendre ces séries beaucoup plus rapidement convergentes, ce qui rendait possible les calculs pratiques. Il a fait ces calculs complets avec six chiffres exacts, pour toutes les lois de densités étudiées par les astronomes, au total 25 déterminations de l'aplatissement qui cadre à la fois avec l'attraction et la précession.

Toutes ces valeurs sont extrêmement voisines. Par exemple, la formule très simple de Lipschitz, dont celle de Roche est un cas particulier $n = 2$, donne les valeurs suivantes

| $n =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6,75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1 : e =$ | 297,171 | 173 | 184 | 19 | 20 | 21 | 21 |
| $\rho_1 =$ | 2,72 | 2,25 | 1,78 | 1,30 | 0,83 | 0,36 | 0,0 |

On n'a écrit que les décimales pour l'inverse de l'aplatissement. Ce nombre ne varie que de 0,04 de 297,17 à 297,21. Pratiquement, la densité superficielle étant comprise entre 2 et 3, la variation correspondante de $1 : e$ est seulement de 0,016, un peu plus de 0,01. *On peut dire que pratiquement, l'inverse de l'aplatissement est déterminé à un centième près*, avec cinq chiffres exacts. La précision des calculs théoriques qui donnait déjà des limites extrêmements resserrées, à 0,3 près, est donc encore bien dépassée par les calculs pratiques.

Des lois plus compliquées, donnant une inflexion de la courbe des densités, fournissent les mêmes aplatissements. Elles donnent une densité superficielle trop considérable pour la Terre. Pour Jupiter et Saturne, au contraire, ces

lois seules permettent de rendre compte de leur aplatissement. Ceci montre que l'état interne de ces planètes est assez différent de celui de la Terre, et qu'il doit y avoir un véritable noyau de condensation, indiqué par l'inflexion des densités.

Ces calculs numériques permettent de plus de déterminer la loi des densités, qui, dans chaque cas particulier, peut seul fournir l'aplatissement compatible *à la fois* avec l'attraction et avec la précession. La formule donnée avant 1920 par *l'Annuaire du Bureau des Longitudes* fournissait le nombre 291,14 en tenant compte de l'attraction seule, et 298,53, en tenant compte de la précession seule. Ces valeurs étaient trop peu concordantes. En prenant au contraire 10,41 pour la densité centrale et 2,23 pour la densité superficielle, on obtient alors le nombre 297,18 dans les deux cas, avec la formule,

$$\rho = 10{,}41 - 8{,}18r^2. \tag{13}$$

6. **Calculs en seconde approximation** — Les calculs précédents ont été faits en tenant compte seulement de la première puissance de l'aplatissement et en négligeant $e^2$. Avec cette approximation les surfaces de niveau sont ellipsoïdales et l'on peut leur appliquer les équations de Clairaut et la solution de Poincaré.

Callandreau, en poussant les calculs jusqu'à la seconde approximation démontre, que *dans un fluide hétérogène, en équilibre permanent, animé d'une rotation lente, toutes les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes déprimés entre les pôles et l'équateur*[1].

[1] Sur la figure des planètes p. 31. (1889), *An. de l'Obs. de Paris*, t. 19.

Il démontre que la dépression maximum à 45° de latitude ne peut pas dépasser 5 m.

A. VÉRONNET a calculé les limites maximum de cette dépression avec la formule de LIPSCHITZ en faisant varier $n$. Il trouve[1] des valeurs comprises entre $1^m,26$ et $4^m,27$ pour des valeurs de la densité superficielle comprise entre 2 et 3.

Avec la formule de ROCHE, qui réalise l'accord des aplatissements donnés par l'attraction et par la précession, il trouve la valeur qui doit être réalisée pratiquement

$$dr = 3m28 \pm om42,$$

valeur identique à celle de G.-H. DARWIN[2]. Cette déformation est tout à fait insensible et négligeable pour la Terre.

Pour Jupiter et Saturne on obtient des dépressions maximum de 183 et 552 kilomètres, qui sont 23 et 12 fois moindres que leurs aplatissements. Elles sont relativement 3.000 et 10.000 fois plus grandes que pour la Terre. Cette dépression pourrait donc atteindre des valeurs considérables, avec des condensations et des vitesses de rotation plus grandes.

A. VÉRONNET a repris également l'étude des deux limites théoriques de l'aplatissement avec les corrections à introduire en seconde approximation.

Finalement on obtient pour les limites extrêmes des

[1] *Journal de Math.*, 1912, p. 462.

[2] The theory of the figure of the Earth. *Monthly notices*, p. 107 (1889).— WIECHERT trouve $2^m,79$ dans *Nachr. K. Gesell.* zu Göttingen (1896).

valeurs de l'aplatissement, qui, satisfont à la fois à l'attraction et à la précession en seconde approximation,

$$(14)\quad 296{,}732 < \frac{1}{e} < 297{,}504 \qquad \frac{1}{e} = 297{,}12 \pm 0{,}38$$

Comme $e^3$ est de l'ordre $10^{-8}$ les valeurs ci-dessus ont 5 chiffres exacts en toute approximation.

Les 25 calculs numériques de première approximation, corrigés de même, donnent des limites étroitement resserrées,

$$(15)\quad 297{,}179 < \frac{1}{e} < 297{,}213 \qquad \frac{1}{e} = 297{,}19 \pm 0{,}02$$

On peut dire ainsi que *pratiquement l'inverse de l'aplatissement est déterminé à 0,02 près, dans l'hypothèse de Clairaut, par les seules données relatives à l'attraction et à la précession.*

Les mesures géodésiques et celles relatives au pendule sont loin de donner la précision ci-dessus, fournie par les seuls ressources du calcul mathématique, appliqué aux données astronomiques. Les mesures de Clarke et de Faye donnaient en effet $\frac{1}{292}$ et $\frac{1}{293}$, celles plus récentes de Helmert et Hayford, donnent $\frac{1}{297}$ et $\frac{1}{298}$ à une ou deux unités près. On peut dire d'ailleurs que si ces dernières mesures ont fini par s'imposer, c'est grâce à la démonstration mathématique, qui imposait ces valeurs comme seules compatibles avec les mesures astronomiques.

Il serait à désirer que les mesures géodésiques et celles du pendule puissent atteindre la précision des mesures astronomiques, car les marées de l'écorce prouvent surabondamment que la surface terrestre possède assez

de jeu pour se mettre en équilibre hydrostatique, sous l'action des forces permanentes. Alors si la valeur de l'aplatissement mesuré ne cadrait pas avec les limites calculées, il faudrait abandonner l'hypothèse de Clairaut d'une vitesse uniforme et *recourir à une autre des hypothèses* qui seront étudiées dans le numéro suivant.

Des calculs de l'aplatissement en seconde approximation, mais uniquement pratiques et numériques avaient été faits déjà par Wiechert, dans l'hypothèse un peu simpliste d'une terre formée seulement de deux couches, d'un noyau central et d'une écorce. Il avait trouvé 297.3 pour la valeur de l'inverse de l'aplatissement. Callandreau avait trouvé la même valeur 297,4. G.-H. Darwin [1] avait fait également les calculs avec la loi de Roche et trouvé 296,4, valeur qu'il juge en parfait accord avec les précédentes, quoique un peu basse. Tous ces auteurs n'avaient fait qu'une seule détermination sans s'occuper des limites possibles, ou de la variation des résultats avec les lois de densités, ou les hypothèses admises.

La loi de variation de la pesanteur avec la latitude a été calculée en seconde approximation par G. H. Darwin et Helmert. Le terme relatif à la dépression est négligeable. Helmert constate que les données du pendule sont parfaitement bien représentées en négligeant le terme en $\cos^2 l$. A. Véronnet montre que, de fait, ce terme est très petit pour toutes les lois de densité. On a finalement

$$(16) \qquad g - g_0 = g_0 \left( \frac{5}{2} \varphi - e - \frac{17}{14} \varphi e \right) \sin^2 l.$$

[1] Theory of the figure of the Earth *Monthly Notices*, 1889, p. 119).

7. **Hypothèses autres que celle de Clairaut.** — L'hypothèse de Clairaut qui a servi de base à la plupart des travaux mathématiques sur la constitution et la forme de la Terre se ramenait à deux autres. Elle considérait l'aplatissement comme assez faible pour négliger son carré. Nous venons d'étudier les précisions et corrections introduites dans les formules et dans la figure de la Terre en tenant compte du carré de l'aplatissement. Cette hypothèse supposait en plus que la Terre était fluide ou du moins en équilibre hydrostatique et qu'elle tournait d'un seul bloc, comme un corps solide. Nous allons voir les modifications qui seraient introduites en faisant d'autres hypothèses, en considérant la Terre comme totalement ou partiellement solide, en admettant que la vitesse de rotation des différentes couches intérieures n'est pas la même que la vitesse à la surface, etc. La plupart de ces calculs ont été faits par A. Véronnet (*Thèse*, 1912).

Dans le cas d'une Terre solide, mais solidifiée avec une vitesse différente de la vitesse actuelle, on obtiendrait un applatissement égal à celui de Faye $\frac{1}{292}$, avec une vitesse 0,04 seulement plus grande que la vitesse actuelle. Le jour aurait été de 23 h. 3 m. c'est-à-dire environ 57 m. plus court qu'actuellement. L'année aurait eu 380 jours. On expliquerait le ralentissement de la rotation par le freinage dû à l'action des marées.

Pour réaliser un aplatissement de 1 : 298, il aurait fallu que la vitesse fut 0,008 plus petite qu'actuellement. Le jour aurait été plus long de 11 minutes environ. L'accélération de la rotation depuis l'époque de la solidifica-

tion s'expliquerait par la contraction due au refroidissement.

Plusieurs auteurs depuis LAPLACE[1], et surtout POINCARÉ, ont démontré, d'une façon complète, que le phénomène de précession du moins n'était aucunement modifié par l'état physique de la Terre, qu'elle soit complètement solide ou liquide, ou qu'elle soit composée d'un noyau liquide, entouré d'une écorce solide rigide ou élastique.

Il n'en n'est plus de même si les vitesses de rotation sont différentes à l'intérieur et à la surface.

A. Véronnet a repris la théorie de la précession dans cette hypothèse. La formule fondamentale de Dalembert est remplacée par la suivante

$$\frac{J}{\omega_1}\int_0^1 \rho da^5 = \int_0^1 \frac{\rho}{\omega}\, da^5 e \qquad (17)$$

où l'on retrouvera la formule de Dalembert en faisant $\omega = \omega_1$.

La formule qui donne les 2 limites de l'aplatissement est corrigée de même. La valeur de J est simplement multipliée par une valeur de $\omega$. En prenant pour les vitesses de rotation une formule analogue à celle de Roche on obtiendrait 292 pour l'inverse de l'aplatissement avec une vitesse de rotation au centre supérieure de 0,08 à celle de la surface. On voit à quel point les limites théoriques calculées plus haut peuvent être influencées par les hypothèses sur l'état interne.

Depuis longtemps on a signalé le freinage dû aux

[1] LAPLACE, Mécanique céleste, Liv. 5, n° 10-12. — H. POINCARÉ, *Bul. astr.*, Sept. 1910.

marées comme une cause de retard dans la rotation de la Terre et d'allongement du jour sidéral.

La réaction doit produire une accélération du mouvement de la Lune. En admettant l'action des marées internes comme seule cause, on trouve qu'un coefficient de frottement de $10^{-8}$ entre l'écorce solide et le noyau abaisserait l'inverse de l'aplatissement à 292, nombre de Faye. Mais un coefficient 10 fois plus grand, égal à celui de la poix, l'abaisserait seulement d'une unité, c'est-à-dire à 296. Comme la géodésie semble avoir confirmé le nombre 297 on en conclut que la Terre tourne sensiblement tout d'une pièce. Alors, sur aucune surface de niveau, malgré l'élévation de température, la viscosité du milieu ne peut être inférieure à celle de la poix ou bien c'est que l'action des marées est négligeable.

G.-H. Darwin avait basé toute sa théorie de la formation de la Lune, aux dépens de la Terre, et son éloignement ultérieur, sur les déformations et les frottements dus aux marées externes et internes. H. Jeffreys a montré que la variation des latitudes s'accompagne d'une déformation de la Terre et que le frottement interne doit être *négligeable*, autrement les déviations du pôle seraient amorties presqu'instantanément. G.-I. Taylor a montré, par contre, que les marées océaniques produisent un effet de résistance dans les mers peu profondes, comme la mer d'Irlande, et que cet effet serait suffisant pour expliquer le ralentissement de rotation de la Terre [1]. Mais si le frottement interne est négligeable la vitesse de rotation interne n'est plus la même qu'à la surface et la formule (17)

[1] A. S. Eddington. The borderland of astronomy and geology. *Nature* (1923) et *Smithsonian report*, (1923)p. 200.

devrait donner une autre valeur pour le terme J dû à la précession ou pour l'aplatissement *e*.

8. **Force tangentielle exercée sur l'écorce. Cause possible des tremblements de Terre.** — On sait maintenant que l'écorce terrestre est assez mobile pour obéir à la force des marées qui la soulève chaque jour, tout comme les eaux de l'Océan.

Les morceaux de la mosaïque terrestre, qui constituent l'écorce, et dont les failles géologiques délimitent les éléments, possèdent donc assez de jeu pour obéir aux forces verticales. La théorie de la précession, reprise d'une façon générale par A. Véronnet, montre que cette action, différente sur deux surfaces de niveau de vitesse différente, n'est pas la même non plus pour tous les parallèles d'une même surface. Il se produit alors comme une torsion et une compression, suivie d'une décompression des différents parallèles, qui est maximum sur le parallèle de 35°.

La formule de la précession pour un anneau situé à une latitude *l* est,

$$(18) \qquad \psi' = \psi_e' \left(1 - \frac{2}{3\cos^2 l}\right) = \frac{2e}{3} \psi_m' \left(1 - \frac{2}{3\cos^2 l}\right)$$

$\psi_e'$ étant la déviation de précession à l'équateur et $\psi_m'$ la déviation moyenne, ou celle d'une surface de niveau solide.

Ces formules montrent que la déviation $\psi'$ de l'axe de rotation d'un anneau fluide, tournant suivant un parallèle, est maximum à l'équateur, puis toujours décroissante. Elle s'annule sur le parallèle de 35°16′ où $\cos^2 l = \frac{2}{3}$,

et elle change ensuite de signe et de sens jusqu'au pôle d'après (18).

A la surface de la Terre la tendance à la déviation, à l'équateur $\psi_e'$, serait près de 450 fois plus grande que la déviation moyenne $\psi_m'$, laquelle serait égale à la déviation de l'ensemble, ou 5o″ par an. Un calcul simple montre que cette déviation correspond à une accélération tangentielle, dans le sens du méridien de 4 cm. par seconde. Cette accélération presse les couches superficielles les unes contre les autres avec une force égale aux 4 millièmes de leur poids, ce qui est considérable. Cette pression latérale va diminuant en latitude jusqu'à 35° 16′ où elle s'annule et change de sens.

Dans le cours d'une rotation de 24 heures, les différents parallèles de la surface tendront donc à se comprimer sur celui de 35° en deux points diamétralement opposés, puis 12 heures après à s'en éloigner. Il y aura compression et dilatation successives tout le long de ce parallèle. Ces parallèles de 35° se trouveront être ainsi des zones de fracture et de dislocation de l'écorce.

Or ce parallèle passe dans l'hémisphère boréal par San Francisco, le Haut Mexique, Lisbonne, la Sicile, la Calabre, la Perse, le Japon, qui est bien une ligne privilégiée des tremblements de Terre. Dans l'hémisphère Sud, ce parallèle se trouve en plein Océan sauf les pointes de continent : Le Cap, Melbourne, Buenos-Ayres.

On peut remarquer d'ailleurs que ces parallèles de 35° sont les cercles où la sphère coupe l'ellipsoïde de même volume, et que ce sont aussi les lignes fixes, autour desquelles s'articule tout ellipsoïde, qui s'aplatit ou se déforme. Ce sont bien des lignes de fracture.

La même force tangentielle pourrait expliquer les

*charriages*, parfois considérables, des couches sédimentaires relevées par les géologues et difficilement expliquées jusque-là.

La grandeur de cette action de déviation varierait avec les mêmes périodes que la marée elle-même, et serait maximum aux solstices et aux syzygies, où les statistiques ont noté également un maximum des tremblements de Terre.

W. Koppen, P.-S. Epstein, W.-D. Lambert, E.-H. Schweydar (1921), R. Wavre, B. Berner (1925) ont entrepris d'intéressantes études également sur la force qui sollicite un continent ou un iceberg vers l'équateur. Wegener les applique à sa théorie de la dérive des continents (*La genèse des continents et des océans* traduction, chez Blanchard, 1924). Si le problème d'une action tangentielle peut se mettre en équation dans le cas d'un objet assez petit flottant sur une masse fluide en équilibre, il semble que cela est impossible pour un continent dont la présence vient rompre l'équilibre des lignes équipotentielles de l'ellipsoïde. Nous savons que les bosses du géoïde atteignent plusieurs centaines de mètres. On n'a plus le droit de conserver les équations de l'ellipsoïde comme surface d'équilibre, pour étudier une force de déviation très faible. Il faudrait, même pour de petits objets, tenir compte de la seconde approximation, de $e^2$, dans l'étude de l'ellipsoïde hétérogène. Ce qui n'a pas été fait.

L'hypothèse de l'isostasie, bien vérifiée, admise par tous les géodésiens, nous montre que les morceaux de la mosaïque, que forme l'écorce terrestre, flottent en équilibre hydrostatique plus ou moins parfait (tremblements de Terre, marées de l'écorce) sur une couche fluide située à 20 ou 30 km de profondeur. Sous les océans cette pro-

fondeur est peu différente de celle des continents, le poids et la pesanteur y sont les mêmes. Il paraît enfantin d'admettre que les parties continentales puissent dériver et voyager, comme si elles flottaient sur les océans, au lieu d'y être accolées sur 20 km. de profondeur.

---

## CHAPITRE III

### ÉQUILIBRE PHYSIQUE D'UN ASTRE GAZEUX GAZ PARFAITS ET GAZ RÉELS CAS D'UNE TEMPÉRATURE UNIFORME

1. **Le problème qui se pose. Les diverses sortes d'équilibre et de lois des gaz.** — Dans les deux chapitres précédents nous avons étudié les conditions de l'équilibre physique d'un astre supposé liquide. Nous abordons ici l'étude d'un astre gazeux. Le problème n'est plus purement mathématique, mais se complique de conditions physiques, plus ou moins complexes, qui doivent être vérifiées dans toute la masse.

Le problème consiste à déterminer la densité, la température et la pression à l'intérieur de l'astre, connaissant seulement leurs valeurs à la surface, ainsi que la masse et le rayon. Il y a donc trois paramètres variables, pour un astre donné, densité, température, pression, dont la valeur doit être déterminée en chaque point.

La physique nous donne une première relation entre ces paramètres, c'est la formule de la loi des gaz. On a d'abord étudié la formule des gaz parfaits, la plus simple, mais qui est complètement fausse à partir d'une pression de quelques milliers d'atmosphères. Or, au centre du Soleil la pression atteint un minimum de plusieurs milliards d'atmosphères. Cette formule est donc inapplicable ici et il a fallu recourir à la loi des gaz réels, plus compliquée.

Il faut encore une autre relation pour ramener les pa-

ramètres à un seul. Elle sera donnée par la nature de l'équilibre réalisé. On a distingué l'équilibre isothermique, l'équilibre adiabatique, l'équilibre radiatif, etc. Nous ne savons pas quel est celui qui est réalisé en fait. Il faut donc les étudier tous et déterminer des *cas limites* entre lesquels les cas réels seront certainement compris. En étudiant un seul cas d'équilibre on peut toujours faire cadrer avec l'observation les résultats extérieurs, les seuls connus. Il suffit de laisser arbitraires un certain nombres de paramètres. On obtient ainsi un équilibre possible. Rien ne prouve que ce soit un équilibre *réel*. Il se trouve en particulier que l'équilibre radiatif, entretenu par le seul rayonnement, est impossible à l'intérieur d'un astre comme le Soleil.

Il vaut beaucoup mieux être certains que les valeurs réelles des éléments considérés sont comprises entre telles limites, même très larges, que de posséder des valeurs précises mathématiquement, mais douteuses comme réalité physique.

Nous verrons que l'hypothèse d'une température uniforme (équilibre isothermique) et celle d'une densité uniforme, constituent deux cas limites extrêmes de l'équilibre et nous les étudierons plus spécialement, en y ajoutant la considération de l'équilibre adiabatique, équilibre intermédiaire et peut-être plus voisin de la réalité.

D'ailleurs, dans le cas de gaz réels, par l'effet des fortes pressions, ces deux équilibres extrêmes arrivent à se confondre en un seul, en réalisant à l'intérieur d'un astre une *densité et une température sensiblement uniformes*. Nous étudierons plus spécialement et complètement le cas de densité uniforme dans le chapitre suivant. On pourra considérer les résultats comme généraux.

La loi des gaz réels avec densité limite nous donnera des résultats très précis sur la délimitation de l'astre et les conditions à la surface, ce qui permet de faire varier ces conditions pour étudier l'évolution des astres, ce qui sera l'objet des chapitres suivants.

2. **L'état fluide spécial à l'intérieur d'un astre.** — Les expériences d'Andrews ont établi l'existence d'une température limite au delà de laquelle un corps ne peut plus exister à l'état liquide. Il devient gazeux et suit les lois des gaz, quelle que soit la pression à laquelle il est soumis. Par contre, les expériences d'Amagat ont établi de même l'existence d'un volume limite, d'une densité limite, vers laquelle tendrait un corps sous des pressions croissantes, en rapprochant ses propriétés de celles des liquides. La vieille loi de Mariotte a donc été corrigée par différents auteurs pour y introduire cette densité limite maximum (Ván der Vaals, Clausius, etc.). En outre, les expériences de Tresca ont montré que les solides, sous fortes pressions, se moulent et *fluent* comme des liquides, en acquérant également l'élasticité des liquides. Sous fortes pressions, *nous n'aurions donc plus qu'un état de la matière, l'état fluide*, de même qu'à hautes températures, liquides et vapeurs ne se trouvent plus que sous un seul état, l'état gazeux. Enfin sous des pressions et des températures également élevées, il n'y a plus que l'état fluide, assez voisin de l'état liquide, mais possédant à la fois la rigidité des solides et la puissance d'expansion des gaz.

Comme la température du Soleil est voisine de 6000° à la surface et la pression de quelques milliards d'atmosphères au centre, nous devons le considérer, ainsi que les

étoiles et peut-être certaines planètes, comme étant dans cet état spécial assez différent de ce que nous appelons vulgairement solide, liquide ou gaz, mais cependant aussi parfaitement défini que ceux-ci.

Ce chapitre aura pour objet, après l'étude critique des travaux faits au moyen de la loi des gaz parfaits, d'étudier l'équilibre et la constitution physique d'une masse gazeuse, de son noyau et de son atmosphère, au moyen de la formule des gaz réels. Les travaux relatifs à l'application de la formule des gaz réels, aux différents équilibres possibles sont dus surtout à A. Veronnet.

La constitution physique étant ainsi déterminée, on pourra ensuite appliquer en connaissance de cause la loi du rayonnement, qui permettra de déterminer les conditions d'évolution dans le passé et dans l'avenir, avec des modifications de la température et de l'état physique, s'il y a lieu.

3. **La formule des gaz parfaits et l'équilibre adiabatique. Etude critique des résultats.** — C'est J.-H. Lane, en 1870, qui a tenté de résoudre le premier le problème de l'équilibre d'une masse gazeuse, comme le Soleil, en lui appliquant la formule des gaz parfaits et la loi de l'équilibre adiabatique [1]. Il a été suivi dans cette voie par sir W. Thomson (1887) [2], Emden (1902) [3],

[1] *Amer. Journal*, 2e série, t. 50, p. 57. Voir un exposé très complet dans Les théories modernes sur le Soleil, p. 188, de J. Bosler, E. S.

[2] *Phil. mag.*, 5e série, t. 23, p. 287.

[3] *Ann. der Phys.*, 4e série. B. 7, p. 176, Gaskugeln, Leipzig BG. Teubner, 1907.

enfin J.-J. See (1905) [1]. H. Poincare dans ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* de 1911 n'envisage pas le problème différemment. Il semble que la simplicité de la formule ait séduit les mathématiciens, qui ne paraissent pas avoir cherché une autre voie, alors que la complexité et l'on peut dire la bizarrerie des résultats, aurait dû en éloigner les physiciens et les astronomes.

La formule des gaz parfaits, due à Clapeyron, et qui condense en une seule à la fois la loi de Bayle-Mariotte et celle de Gay-Lussac, peut s'écrire

$$(19) \qquad pv = \mathrm{RT}, \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\mathrm{RT}}{\mu}, \qquad \mathrm{R} = 1{,}99 \text{ cal.}$$

Dans le cas d'une *température uniforme*, équilibre isothermique, la densité et la pression varieraient en sens inverse du carré de la distance au centre $p\rho^2 = \mathrm{C^{te}}$. La densité à la surface devrait être encore égale au tiers de la densité moyenne, pour être nulle seulement à l'infini. La densité croîtrait trop vite au centre et trop lentement à la surface.

Pour essayer de rapprocher les résultats de la réalité on a introduit l'hypothèse de l'équilibre adiabatique. Il est défini mathématiquement pour les gaz par la formule $p = k\rho^{\varepsilon}$, où $\varepsilon$ est le rapport des deux capacités calorifiques à pression constante et à volume constant. On introduit ainsi une nouvelle relation, qui permet de déterminer T et par conséquent aussi $p$ et $\rho$ en fonction du rayon de l'astre. Cet équilibre est défini physiquement par la condition que la circulation se fasse sans gain ni perte de chaleur.

Mais les calculs relatifs à cette hypothèse sont aussi

[1] *Astron. Nacht.*, 169, n° 4053, p. 321.

longs et pénibles que peu concordants[1]. J.-J. See trouve comme température centrale 10 ou 90 millions de degrés, Lane 24 millions. La variation de température à la surface, serait proportionnelle à la pesanteur, formule d'Oppolzer. En regardant cette variation comme constante on obtient 9,24 millions de degrés au centre pour $\mu = 1$ et molécules monoatomiques, 13,2 millions pour $\mu = 2$ et molécules biatomiques. Ce serait tout aussi précis. Mais ces millions de degrés n'ont plus pour nous aucune signification physique.

Enfin cette hypothèse, qui permet de déterminer la pression et la température à l'intérieur ne s'applique plus à la surface ni à l'atmosphère et ne permet pas d'en déterminer les conditions physiques, qui nous intéresseraient cependant beaucoup plus, au point de vue astronomique, qu'une température centrale aussi hypothétique. C'est pourquoi tous ces calculs compliqués n'ont eu en somme aucun résultat pratique.

La formule des gaz parfaits, appliquée à l'évolution des astres, n'a pas fourni de résultats plus explicatifs. En effet on déduit facilement des formules que la température devrait varier en raison inverse du rayon. De plus, au moins pour un gaz monoatomique ou biatomique, la température augmenterait avec la perte de chaleur, donc avec la contraction.

Dans cette hypothèse le Soleil aurait été plus froid mais plus gros autrefois. Le rayonnement résultant aurait été inverse du carré du rayon, donc le Soleil aurait été moins chaud autrefois, et la température de la Terre

[1] Voir par exemple J. Bosler, les Théories modernes du Soleil, p. 188, et A. Véronnet, *Bul. astron*, 1919.

aurait dû être plus basse, ce qui est contraire aux constatations géologiques.

En résumé, la formule des gaz parfaits ne permet d'expliquer ni l'équilibre physique du Soleil et des étoiles dans le présent, ni leur évolution passée ou future. Elle pourra seulement s'appliquer peut-être à des masses faibles ou très diluées, comme les nébuleuses, les comètes, les atmosphères des étoiles et des planètes.

4. **Equilibre radiatif Pression de radiation interne et formule des gaz parfaits. Travaux d'Eddington.**— L'équilibre radiatif est celui qui est entretenu par le seul rayonnement des couches internes, sans aucun courant de convection. Il fut d'abord étudié par SCHWARZSCHILD pour l'atmosphère d'un astre [1], puis appliqué par EDDINGTON à l'intérieur d'une étoile [2]. Ce dernier y a joint la considération de la pression de radiation déjà considérée par R.-A. SAMPSON [3] et T. BIALOBJESKI [4]. Bien qu'Eddington ait fait de la pression de radiation une partie principale de sa théorie, ce n'est cependant qu'un accessoire dans l'équilibre radiatif, qui doit se définir et s'étudier indépendamment de cette pression (voir n° 6). D'ailleurs dans les étoiles normales ou naines elle est complètement négligeable devant la gravitation, et ne prend une certaine importance que pour les étoiles géantes, où la pres-

[1] *Göttinger Nachrichthen*, Math. Phys. Klasse. H. 1 (1906).

[2] *Monthly Notices*. On the radiative equilibrium of stars., t. 77, p. 16 et 596 ; — t. 79, p. 22 ; — *Astroph. Journal*, V, 48, p. 205 (1918).

[3] *Memoirs of the Royal Astronomical Society of London*, t. 51, p. 123 (1894).

[4] *Bul. Ac. Sc. Cracovie. Série*. A. Sc. math, mai 1913.

sion est faible. Voici l'ensemble de cette théorie d'après l'excellent exposé de M. J. Bosler dans l'*Evolution des Etoiles* [1].

La pression totale P en un point est équilibrée par la somme élastique du gaz $p$ et de la pression interne de radiation $p'$. On a les formules

$$(17) \quad P = p + p', \qquad p' = \frac{4}{3}\frac{\sigma}{c}T^4, \qquad dP = -g\rho\, dr.$$

$\sigma$ la constante de la loi de Stefan, $c$ la vitesse de la lumière, $g$ la gravité.

Eddington appelle H la quantité d'énergie traversant radialement par $cm^2$ : sec., la couche de rayon $r$, où l'absorption est $k$. Elle provient de la différence d'énergie rayonnée par toutes les molécules, vers l'extérieur et vers l'intérieur,

$$(18) \qquad dp' = -\frac{H}{c}k\rho dr$$

On en déduit, par élimination de $\rho dr$ la relation entre $dP$ et $dp'$,

$$(19) \qquad dP = \frac{gc}{Hk}\, dp'.$$

Eddington ramène alors le problème actuel à celui de Lane, du numéro précédent en posant, *a priori* et par hypothèse, que la pression totale P est proportionnelle à la pression interne de radiation $p'$, et par suite à la force élastique $p$ des gaz parfaits.

Cette hypothèse se ramène d'après (19) à deux autres ;

[1] P. 74. Conférences rapport sur la physique. Les presses universitaires de France.

1° Le coefficient $k$ est constant ; 2° l'énergie radiale H est partout proportionnelle à la gravité $g$ à l'intérieur de l'astre. On a alors en désignant par $\beta$ une constante,

$$\frac{Hk}{gc} = 1 - \beta \tag{20}$$

En intégrant la formule précédente, avec $P = p' = 0$ à la surface, on a

$$p' = (1 - \beta)P, \qquad p = \beta P, \qquad p = \frac{R}{\mu}\rho T. \tag{21}$$

Les formules du début nous donnent alors :

$$P = \frac{R}{\beta\mu}\rho T = \frac{4\sigma}{3c}\frac{T}{1-\beta} \tag{22}$$

et par élimination de T,

$$P = K\rho^{4/3}, \qquad K^3 = \frac{3R^4(1-\beta)c}{4\sigma\mu^4\beta^4}. \tag{23}$$

nous sommes ramenés à la formule de l'équilibre adiabatique du numéro précédent $p = k\rho^{\varepsilon}$, où on avait $\varepsilon = \frac{5}{3}$ pour les gaz monoatomiques, et $\frac{7}{5}$ pour les gaz biatomiques. Ici on aura la même formule entre P et $\rho$, où $\varepsilon$ sera remplacé par $\frac{4}{3}$.

On est conduit aux mêmes calculs que dans le numéro précédent, ce qui donne à peu près les mêmes résultats pour les températures. Il y a l'avantage théorique que l'exposant $\varepsilon$ est constant et indépendant du rapport des chaleurs spécifiques. Ce sera un inconvénient pratique, car ces résultats ne dépendront pas de l'état physique monoatomique ou biatomique. Les conditions de l'équi-

libre radiatif d'un gaz seraient toujours, d'après la valeur $\frac{4}{3}$ de l'exposant, intermédiaires entre celles de molécules biatomiques et triatomiques en équilibre adiabatique.

5. **Application aux étoiles géantes et aux étoiles naines.** — On déduit facilement de ces formules que pour une autre étoile de masse M' et de rayon $r'$ on a

$$\frac{P}{P'} = \frac{M^2}{M'^2}\frac{r'^4}{r^4}, \qquad \frac{K}{K'} = \left(\frac{M}{M'}\right)^{2/3} \tag{24}$$

et

$$\frac{M^2\,\mu^4\,\beta^4}{1-\beta} = C^{te} \tag{25}$$

K et $\beta$ ne dépendraient pas du rayon, mais seulement de la masse de l'étoile.

En désignant par L la luminosité totale de l'étoile on a, T étant la température effective à la surface,

$$L = 4\pi r^2 H = 4\pi\sigma r^2 T^4, \qquad g = f\frac{M}{r^2} \tag{26}$$

d'où comme le rapport H et $g$ est constant

$$L = 4\pi f c M \frac{1-\beta}{k} \tag{27}$$

Pour les étoiles de même masse $kL$ est constant. Si $k$ est le même il en sera ainsi également pour l'éclat L et la grandeur absolue des étoiles.

On trouverait de même que la température effective est proportionnelle à $\rho^{1/6}$. On en déduirait les valeurs entre la masse, la température, la grandeur absolue. Nous ver-

rons cela plus loin. Notons que ces relations sont totalement indépendantes du temps et de l'évolution, comme toutes celles-ci, et ne peuvent absolument pas nous renseigner sur cette évolution.

M. EDDINGTON calcule, d'après les électrons expulsés, un poids moléculaire moyen 2,6. Les températures centrales varient peu, de 7,1 millions pour $\mu = 3,3$, avec 16 électrons expulsés, à 8,7 millions pour $\mu = 6,2$, avec 8 électrons expulsés, dans le cas d'une masse égale à 1,5 de celle du Soleil.

Mais tous ces calculs ne sont applicables que pour des astres à faible densité, de l'ordre de celle des gaz, comme le seraient les géantes en admettant qu'il n'y ait pas de noyau condensé à leur intérieur [1].

Même dans ce cas, les pression internes sont beaucoup trop considérables pour que la formule des gaz parfaits donnant $p$ soit applicable. On sait qu'elle ne l'est plus à partir de 2 ou 3.000 atmosphères, l'écart des densités étant alors du même ordre que la densité même. Or dans l'étoile géante calculée par EDDINGTON, il trouve une pression de 3.900 atm. à une profondeur, où la masse extérieure serait seulement égale à 0,007. La formule et les calculs seraient donc inapplicables à toute la masse interne, c'est-à-dire à plus des 99 centièmes de la masse totale.

M. EDDINGTON a appliqué également la formule des gaz réels à l'étude de la constitution physique des étoiles pour

[1] CHAPMAN a fait remarquer également que les calculs ne sont pas applicables au cas du mélange de deux ou plusieurs gaz. Le plus léger seul paraîtrait à la surface, le plus lourd se condenserait à l'intérieur. (*Monthly notices.*, t. 77, 1917).

étendre ses calculs aux étoiles naines condensées [1]. Mais au lieu d'étudier directement les résultats de cette formule, il ramène les calculs à ceux de la formule des gaz parfaits, comme il avait ramené les formules de l'équilibre radiatif à celles de l'équilibre adiabatique. Il considère de plus la densité limite du gaz comme constante, ce qui simplifie énormément les calculs, mais c'est une simplification qui ne peut correspondre à rien de réel.

On a pour la formule des gaz réels, $\rho_0$ étant la densité limite,

$$(28) \qquad p\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \frac{RT}{\mu} \qquad \rho' = \rho\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}$$

Cette formule est ramenée à celle des gaz parfaits en y remplaçant la densité $\rho$ par $\rho'$ fonction homographique de $\rho$, introduite par M. Eddington. Le cas des gaz réels est ramené ainsi au cas précédent et à celui de Lane. Mais la fonction $\rho'$ ne se prête pas au calcul aussi facilement que $\rho$. Il faut procéder par des approximations successives.

L'étude directe de la formule des gaz réels, formule vraie, correspondant à des relations réelles, est bien préférable à ce long détour. Nous verrons plus loin les résultats beaucoup plus précis qu'on en déduit.

M. Eddington adopte pour densité centrale du Soleil le nombre 12,8. Il calcule que le Soleil a dû passer par un maximum de température de 6.600 degrés seulement. Ce maximum si faible résulte du fait qu'il a considéré la densité limite comme constante, hypothèse beaucoup trop simpliste et contraire à la réalité. A. Véronnet, après avoir démontré l'existence de ce maximum et les conditions

[1] *Monthly notices*, t. 77, p. 76 (1917) et t. 83, p. 98 (1922).

de sa réalisation, a montré qu'il pouvait varier de 6190 degrés dans le cas de $\rho_0$ constant, à 57 millions de degrés dans le cas de la variation maximum ce cette densité limite (ch. 4). Le premier de ces nombres indique suffisamment que l'hypothèse de la densité limite indépendante de la température ne correspond pas du tout à la réalité astronomique.

Dans un article récent J.-H. JEANS corrige une formule d'EDDINGTON sur la loi de luminosité, conclut que la pression de radiation n'introduit rien de nouveau dans l'équilibre d'un astre et est négligeable. La radiation peut servir à transmettre une plus grande quantité de chaleur à la surface, l'ionisation à dégager plus de chaleur. Il pense qu'à part cela le vieux modèle d'astre gazeux à équilibre convectif suffit et que « les théorèmes paradoxaux et variés énoncés récemment ne correspondent à rien de réel ». (On the masses. luminosities and surface temperatures of the stars. *M. N.* t. 85, p. 792-797, 1925).

6. **L'équilibre radiatif est impossible. Etude générale.** — Nous avons vu que la théorie de l'équilibre radiatif est indépendante de la pression de radiation. Cependant la théorie d'EDDINGTON exposée ci-desssus y fait jouer à cette pression un rôle principal aussi bien dans l'exposé théorique que dans les applications pratiques, par l'introduction du paramètre $\rho$. Nous donnons la théorie générale d'après les travaux de JEANS [1], MILNE [2], A. VERONNET [3].

[1] *Monthly Notices*, t. 77, 1917.

[2] Radiative équilibrium in the outer layers of a star. *Monthly notices*, t. 81, p. 361-375; 1921, t. 85, p. 750-768 et 768 à 792 (1925).

[3] *Comptes rendus*, t. 181, p. 710. 1925. *Bul. astron.*, 1926.

Soit R le rayonnement intrinsèque en un point, fonction de la seule température absolue T. Soit I l'intensité du rayonnement arrivant en ce point d'une direction faisant un angle $\theta$ avec le rayon vecteur, on a

$$(29) \qquad 2R = \int_0^{\pi} I \sin\theta d\theta, \qquad \pi R = \sigma T^4$$

Soit F le flux, sortant normalement pas cm² sec de la couche au point considéré. Il sera constant et définira la température effective $T_e$ à la surface. On peut négliger la courbure des couches assez loin à l'intérieur. On a

$$(30) \qquad F = 2\int_0^{\pi} I \sin\theta \cos\theta \, d\theta, \qquad \pi F = \sigma T_e^4.$$

A la surface on intégrera de o à $\frac{1}{2}\pi$,

Si l'équilibre est radiatif la variation de l'intensité du rayonnement d'une couche à l'autre est égale à la différence entre l'absorption et l'émission de cette couche dans la direction considérée. Soit $a$ le coefficient d'absorption égal à celui d'émission, on aura

$$(31) \qquad dI = (I - R)\frac{a\rho dr}{\cos\theta} = (I - R)\frac{a dm}{\cos\theta}$$

$dm$ étant la masse de la couche $dr$ par cm².

D'autre part, l'intensité du rayonnement dans la direction $\theta$ est la somme des rayonnements de toutes les masses $dm$ situées dans cette direction, soit

$$(32) \qquad I = \int_0^{\infty} Re^{-am\sec\theta}\frac{adm}{\cos\theta}$$

Il faut intégrer de zéro à l'infini, dès que la couche est

assez profonde pour que l'absorption y soit complète dans toutes les directions.

Cette dernière formule intégrée par parties donne

$$(32') \qquad I = R + \cos\theta \int_0^{\infty} \frac{dR}{adm} e^{-am\sec\theta} \frac{adm}{\cos\theta} =$$

$$R + \left(\frac{dR}{adm}\right) \cos\theta.$$

La dérivée entre parenthèse représente la valeur moyenne de l'expression.

La formule (32') comparée à (31) nous donne

$$(33) \qquad \frac{dI}{adm} = \left(\frac{dR}{adm}\right) = \frac{dR}{adm} = C^{te}, \qquad I = R - C\cos\theta.$$

Cette expression de I en fonction du rayonnement R en un point et d'une constante C est celle trouvée par Jeans et Eddington, pour les couches intérieures.

Pour évaluer l'intensité du rayonnement provenant de l'extérieur, dans les couches superficielles, il faut intégrer (32) de o à $m$, la masse par cm² comprise au-dessus de la couche considérée. On démontre alors que l'on obtient, comme condition d'existence à la surface la même relation (33) mais la constante est déterminée et égale à $R_1$

$$(33)' \qquad \frac{dR}{adr} = -\frac{adm}{dR} = -R_1, \qquad I = R - R_1\cos\theta.$$

En intégrant cette expression depuis la surface, rayonnement $R_1$, température $T_1$, jusqu'à la profondeur $m$, température T, on obtient,

$$(34) \qquad R = R_1(am + 1), \qquad T^4 = T_1^4(am + 1).$$

Cette formule donne la température T sur une couche quelconque en fonction de la masse $m$. Sur une grande profondeur on peut considérer la pesanteur $g$ comme constante, on a $p = mg$ pour la pression sur la couche considérée. De même en portant la valeur I (33)' dans l'expression de F (30) on obtient la valeur de la température superficielle $T_1$ en fonction de la température effective $T_e$. La formule (34) devient

$$(34)' \qquad T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 \left(\frac{a}{g} p + 1\right) \qquad T_e^4 = \frac{4}{3} T_1^4$$

C'est *l'équation générale de l'équilibre radiatif* qui relie la température à la pression.

On retrouve la formule d'Eddington en supprimant 1 devant $p$ et en corrigeant $p$ de la pression de radiation.

On peut supprimer 1 pour l'intérieur, dès que les pressions sont considérables, mais alors on n'a aucun droit d'appliquer les relations à la surface et d'en déduire les formules entre l'éclat et la masse, par exemple.

En introduisant la pression de radiation et le paramètre $\beta$, Eddington en profite pour admettre que le nouveau coefficient de $p$ est constant. Cela revient à admettre que la pesanteur $g$ à l'intérieur d'un astre peut être considérée comme constante, en corrigeant sa valeur à la surface, c'est-à-dire en somme en prenant une valeur moyenne. C'est une solution très élégante au point de vue mathématique, mais très peu rigoureuse au point de vue physique, comme l'a fait remarquer Jeans.

On peut voir de plus qu'il est impossible avec l'équilibre radiatif de vérifier toutes les conditions à la surface. Ainsi on a obtenu la condition générale (33') et l'expression de I correspondante. Cette dernière ne vérifie pas la

valeur du rayonnement à la surface, donnée par (30). Elle ne donne pas non plus la même valeur du flux à l'intérieur et à la surface, donné par (31).

Milne a déterminé la constante C de (33) de manière à vérifier le rayonnement et le flux à la surface. Elle ne vérifie pas la constance du flux, ni la condition (33)'. Jeans a déterminé cette valeur de manière à vérifier la constance du flux. Elle ne vérifie ni (33'), ni la valeur du rayonnement à la surface. Schwartzschild considère le rayonnement comme purement radial. Dans ce cas simplifié, il y a compatibilité entre les valeurs.

Chose plus grave, si l'équilibre radiatif se maintenait jusqu'à une certaine profondeur, il rendrait impossible l'équilibre physique. En effet, la température devrait augmenter tellement vite d'après la condition (34) ou (34)' que la densité diminuerait au lieu d'augmenter avec la profondeur, à partir d'une certaine couche. Les couches situées au-dessous remonteraient à la surface.

En effet, prenons la dérivée logarithmique de (34') indépendante des coefficients, nous avons l'équation différentielle de l'équilibre radiatif. Joignons-y l'équation différentielle de la pression, on a

$$4\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p}, \qquad dp = -g\rho dr. \tag{35}$$

Prenons de même la dérivée, par rapport à la distance au centre $r$, de l'équation des gaz réels, nous obtiendrons en tenant compte de (35), la variation de la température et de la densité $\rho$ avec la profondeur

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{4}\frac{g\mu}{R}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \tag{36}$$

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{4}\frac{g\mu}{RT}\rho\left(1 - \frac{1}{3}\frac{p}{R}\frac{db}{dT}\right)\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)^2$$

$db$ indique la variation du covolume. La parenthèse contenant $db$, dans l'expression de la variation de la densité $\rho$, d'abord positive à la surface, s'annule et change de signe, dès que la pression $p$ devient assez considérable. La densité $\rho$ d'abord croissante, devient alors décroissante avec la profondeur. L'équilibre se trouverait rompu au-dessous de cette couche critique et les couches plus légères remonteraient au-dessus.

On voit d'ailleurs facilement que cette valeur de $pdb$ est telle que la variation de température deviendrait précisément égale, puis supérieure, à celle qui donnerait une densité constante. La densité ne peut donc que décroître.

Si l'on fait varier le covolume $b$, ou la densité $\rho$, avec la température, suivant la formule classique de la dilatation, on trouve que la densité décroîtrait, dès que sa valeur atteindrait les trois quarts de la densité limite du gaz. Ceci aurait lieu pour des pressions de quelques milliers d'atmosphères et à quelques centaines de kilomètres de profondeur seulement. L'équilibre radiatif serait impossible à l'intérieur du Soleil et des étoiles. Il serait convectif et exigerait nécessairement des courants de convection pour se maintenir.

H. Zeipel a étudié aussi l'influence de la rotation dans l'équilibre radiatif (*Monthly notices*, t. 84, p. 665, 1924, et t. 85, p. 678, 1925). J. H. Jeans lui fait remarquer (*M. N.* t. 85, p. 526) que sa formule est fausse et que le terme dépendant de la rotation est négligeable pratiquement.

7. **Choix et discussion de la formule relative à un gaz réel.** — La loi de Mariotte $pv$ = const. ne s'applique aux gaz réels que dans des limites restreintes. On a été

amené, par les études théoriques aussi bien que par les résultats expérimentaux, à ajouter un terme de correction à $p$ et à $v$.

Dupré avait déjà fait remarquer (1871) que le volume $v$ ne pouvait pas diminuer indéfiniment, mais devait tendre vers une limite $b$ pour des pressions croissant indéfiniment. Hirn avait fait remarquer en plus (1874) que la compression et le rapprochement des molécules devait introduire une attraction supplémentaire, agissant pour exercer comme une pression intérieure $\pi$, et l'on avait eu les formules,

$$(37) \quad p(v - b) = RT \quad \text{et} \quad (p + \pi)(v - b) = RT$$

Les calculs théoriques et les expériences à haute pression ont pleinement confirmé et précisé ces premières notions.

La théorie cinétique des gaz permet en effet d'établir facilement la loi de Mariotte en considérant le rayon des molécules comme négligeable et les chocs comme instantanés. Si l'on tient compte maintenant de ce rayon, le volume $v$ est toujours remplacé dans la formule par ce qu'on peut appeler le *volume disponible*, $v - b$ où $b$ est le volume que les molécules paraissent occuper par leurs chocs, ou *covolume*, et qui varie seulement avec la température. Si l'on tient compte en outre du retard introduit par les chocs, on obtient le second terme de correction relatif à la pression variable avec les auteurs et moins facile à définir que le premier. Les deux formules les plus connues sont celles de Van der Vaals et de Clausius.

Les calculs théoriques, comme les expériences sur les hautes pressions, montrent donc que les gaz réels sont avant tout caractérisés par l'existence d'un volume limite,

ou d'une densité limite correspondante $\rho_0$, de l'ordre de celle des liquides, et qui se dilatera de même, sous l'action de la température. L'autre terme de correction relatif à la pression, peut être facilement négligé dans une première approximation.

Ce second terme ne fait que modifier légèrement la valeur réelle de la pression sans altérer la forme de la courbe des densités. On pourra donc prendre la formule de Dupré comme suffisamment exacte.

De plus, d'après la théorie des états correspondants, on pourra regarder les calculs et les conclusions théoriques, basés sur la formule des gaz réels, comme absolument généraux et s'appliquant à tous les gaz, même aux vapeurs métalliques des métaux gazéifiés dans les astres. Il n'y aura qu'une différence d'échelle.

8. **Inflexion des densités à l'intérieur d'un astre. Séparation nette de l'atmosphère et du noyau dans l'équilibre isothermique.** — La formule des gaz réels, sous la forme simplifiée de Dupré, peut s'écrire, en remplaçant le volume par la densité, $\mu$ étant la masse moléculaire du gaz, $\rho_0$ la densité limite du gaz à la température T,

$$(38) \qquad p\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \frac{RT}{\mu}, \qquad p = \frac{RT}{\mu}\frac{\rho_0\rho}{\rho_0 - \rho},$$

L'hypothèse la plus simple consiste à considérer une masse gazeuse formée d'un seul gaz à une température uniforme. C'est l'hypothèse de l'équilibre isothermique, la première à envisager. Elle a été étudiée par A. Véronnet [1].

[1] Constitution du Soleil et des étoiles étudiée au moyen de la

Le poids moliculaire $\mu$ est supposé constant. Cela peut être le poids moléculaire moyen d'un seul gaz ou le poids moléculaire moyen d'un mélange intime de gaz. Comme il s'agit de gaz, il semble naturel et même nécessaire d'admettre qu'ils se sont mélangés intimement de manière à réaliser l'homogénéité, comme l'oxygène et l'azote de l'air.

La masse tout entière est soumise à l'attraction de ses éléments. Les surfaces de niveau, d'égale pression et d'égale densité, sont nécessairement sphériques, $p$ et $\rho$ varient seulement avec la distance au centre $r$. En différentiant cette formule par rapport à $p$ et $\rho$ et portant $dp$ dans la formule générale, qui donne l'accroissement de pression d'une couche à l'autre, on a

$$(39) \qquad dp = \frac{RT}{\mu}\frac{\rho_0^2 d\rho}{(\rho_0 - \rho)^2} = -\gamma\rho dr,$$

$$\frac{d\rho}{\rho_0} = -\frac{\gamma\mu r_1}{RT}\frac{\rho_0(\rho - \rho)^2 dr}{\rho_0^2 r_1}$$

Si nous exprimons $\rho$ en fonction de $\rho_0 = 1$ et $dr$ en fonction du rayon $r_1$ de l'astre, on peut écrire

$$(40) \qquad \rho' = -\alpha\rho(1-\rho)^2, \qquad \text{où } \alpha = \frac{\gamma\mu r_1}{RT} = \frac{fM}{r_1}\frac{\mu}{RT}.$$

$\alpha$ est la seule constante de la formule. Elle caractérisera la courbe des densités. On voit qu'elle renferme à la fois le potentiel de gravitation de l'astre et les constantes du gaz, c'est-à-dire les conditions astronomiques et les conditions physiques de la masse gazeuse. Cette formule suppose seulement $\mu$ et T constants. On voit que $\rho'$ tend

formule des gaz réels. *Bul. astr.* t. 35 (1918). 2e Série, t. 1 (1921); t. 3 (1923); *C. R.*, t. 165 (1917) et suivants.

vers zéro à l'extérieur où $\rho$ tend vers zéro et au centre où l'on a $\rho = \rho_0 = 1$ si la pression y est assez grande pour que la densité soit égale à la densité limite. On désignera par $D_0$ la densité centrale de l'astre, qui peut être différente de $\rho_0$.

La pesanteur $\gamma$ sur une couche, ou à une certaine distance $r$, dépend de toute la masse intérieure à cette couche et varie assez lentement avec la distance au centre. Supposons-la pratiquement constante sur une certaine épaisseur (on verra dans la suite que cette hypothèse est largement vérifiée). En prenant alors la dérivée de $\rho'$, avec $\alpha$ constant, on obtient

$$\rho'' = -\alpha\rho'(1-\rho)(1-3\rho). \tag{41}$$

La courbe des densités présente un *point d'inflexion* dans la région où l'on a $\rho'' = 0$, c'est-à-dire

$$\rho = 1/3 = 1'/3\,\rho_0. \tag{42}$$

La variation de densité en ce point est alors égale à

$$\rho'_i = -\frac{4}{27}\alpha. \tag{43}$$

Les formules complètes de Van der Waals et de Clausius donnent les mêmes résultats.

Pour appliquer les formules au Soleil on peut prendre d'abord $\mu = 1$, poids moléculaire de l'hydrogène qui serait à peu près complètement dissocié dans les conditions de l'atmosphère solaire [1]. On aura alors la valeur mini-

[1] Voir E. Briner. Le problème chimique du rayonnement solaire (*Rev. gén. Sc.*, 15 mai 1916). A la température de 6000° et la pression d'une atmosphère, la dissociation atteindrait 0,99 des molécules. A l'intérieur ce ne sera plus vrai. Il faudra faire $\mu = 2$.

mum de $\alpha$ qui est proportionnel à $\mu$ et *la variation minimum de densité*.

On peut faire

$$T = 6000^{0} \qquad \text{et } \gamma = 28 \times 981 \text{ et } r_1 = 7 \times 10^{10}\text{cm}$$

en prenant des nombres arrondis moyens. En désignant par $\alpha_1$ cette valeur minimum de la constante, on obtient

$$\alpha_1 = 3850 \qquad \text{et} \qquad \rho_1' = 570\ ^{1}$$

La densité varie tellement vite en ce point qu'elle passerait de o à $\rho_0$ pour une augmentation en profondeur de $\frac{1}{570}$ seulement du rayon, ou de 1.230 km. sur 700.000. C'est la variation minimum.

Pour une étoile qu'on supposera à la même température, et formée des mêmes éléments, mais avec une masse 64 fois plus grande ou plus petite (limite des masses stellaires connues), $\alpha$ serait 16 fois plus grand ou plus petit. La variation de densité resterait du même ordre et formemerait un véritable seuil entre l'atmosphère et le noyau. Il y aura donc toujours formation *d'un véritable noyau*, sensiblement homogène, qui se comportera comme un liquide véritable.

9. **Le noyau du Soleil. Dilatation totale et poids moléculaire moyen.** — On a supposé $\mu = 1$, poids mo-

Toutes les molécules seront biatomiques, peut-être même tétraatomiques.

[1] On verra plus loin que pour le Soleil le poids atomique moyen doit être voisin de celui de l'argent, 108 : Il faudra faire $\mu = 220$ et l'on aura $\rho_1' = 125.000$ avec $\alpha = 850.000$. La densité croîtrait de o à $\rho_0$ sur une profondeur de 3 km. seulement, si la vitesse d'accroissement se conservait.

léculaire minimum. Or la densité de l'hydrogène à 0° ($\mu = 2$) est 0,0000898 et celle de l'hydrogène liquide au point de solidification 0,086, environ 1000 fois plus grande. Les expériences à hautes pressions sur les gaz ont montré, comme l'a fait remarquer déjà Sarrau, que la densité limite $\rho_0$ était voisine de la densité gazeuse multipliée par 1000. Elle est de l'ordre de la densité liquide, comme il fallait s'y attendre. Mais la densité du Soleil est de 1,41. Le Soleil ne peut donc pas être formé d'hydrogène, ni de corps dont le poids moléculaire moyen serait égal à 1, puisque la densité limite serait dans ce cas seulement de 0,09 environ avec $\mu = 2$.

Pour l'oxygène on a une densité liquide 1,24. De plus le poids moléculaire $\mu = 32$ est égal à 16 fois celui de l'hydrogène. Multiplions la densité de l'hydrogène liquide par 16, on obtient 1,54, nombre tout à fait comparable à 1,24. La densité gazeuse multipliée par 1000 est 1,43. On peut dire que les densités liquides et les densités limites sont proportionnelles aux poids moléculaires dans des limites de précision suffisantes ici.

On en conclut que le poids moléculaire moyen des corps qui composent le Soleil est au moins égal à 30, ou environ celui de l'oxygène.

La densité des planètes extérieures est voisine de 1. Elle croît ensuite plus ou moins régulièrement jusqu'à Mercure, dont la densité est 6,32. Celle du Soleil tombe brusquement à 1,41. Or, si l'on donne à la Terre et aux trois planètes voisines une température interne de 1500° à 2000° avec le coefficient de dilatation du fer, il faut augmenter les densités du tiers ou du quart pour avoir leur densité limite à zéro. Jupiter et Saturne beaucoup plus gros sont probablement à une température voisine

de 3000° qui doit doubler leur volume. Il faut doubler leur densité. Nous obtenons ainsi une série de densités probables, plus régulièrement croissantes, et qui aboutit pour le Soleil, supposé à zéro, à une densité voisine de 10 à 12, environ 8 fois plus grande que la densité actuelle, ce qui lui donne un rayon double de celui qu'il aurait après refroidissement à zéro. Tous les calculs suivants donneront des chiffres assez voisins de celui-ci et il sera commode d'admettre, en première approximation, pour le Soleil, une dilatation de 2 en diamètre et de 8 en volume. La série des densité brutes, et corrigées ou probables, est alors donnée par le Tableau suivant.

| Neptune | Uranus | Saturne | Jupiter | Pet. pl | Mars | Terre | Vénus | Mercure | Soleil |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.2 | 1.3 | 0.7 | 1.36 | ... | 3.8 | 5.5 | 5.0 | 6.2 | 1.41 |
| 1.2 | 1.3 | 1.4 | 2.72 | ... | 5.1 | 7.7 | 6.7 | 8.3 | 11.3 |

Formons le tableau des poids atomiques A des principaux métaux et de leur densité à l'état solide $\rho$, nous avons.

| | O. | Al. | Fe | Zn. | Mo | Ag | Au. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A..... | 16 | 27 | 56 | 65 | 96 | 108 | 197 |
| $\rho$..... | 1.54 | 2.6 | 7.8 | 6.9 | 8.6 | 10,5 | 19,5 |

Nous pouvons compléter la loi de SARRAU en disant que la densité solide, ou la densité limite des corps, est

égale *environ* au dixième de leur poids atomique. En admettant que le rayon du Soleil est doublé par sa dilatation, sa densité moyenne à zéro degré serait 11,2 et correspondrait à peu près à celle de l'argent, poids atomique 108. Comme d'après les formules de dissociation et les fortes pressions les molécules ne seraient pas dissociées à l'intérieur, le *poids moléculaire moyen serait égal à 220.* On peut admettre même que les énormes pressions ont abouti à former des molécules tétraatomiques. Le Soleil pourrait être formé alors d'un noyau de fer (poids atomique 56, poids moléculaire $224 = 56 \times 4$), qui serait la matière la plus universelle, formant le noyau commun des Comètes, de la Terre et des planètes, des étoiles elles-mêmes.

De plus, autre résultat curieux, si on calcule la variation de la densité limite des gaz, d'après les résultats expérimentaux d'Amagat, et la dilatation des liquides très dissemblables, comme le mercure et l'éther, et des métaux usuels, on trouve que *pour tous* la dilatation serait de l'ordre de 6 à 8 fois leur volume à zéro degré, pour des températures de 6 000 à 8 000 degrés. On peut en conclure légitimement que la dilatation de la matière du Soleil doit être également de cet ordre.

On peut en conclure réciproquement que la température interne du Soleil ne doit pas dépasser beaucoup les températures envisagées ici : 6 et 8000 degrés. En effet, nous venons de voir que ces températures suffisent pour doubler le rayon du Soleil. Une température intérieure double, c'est-à-dire de l'ordre de 12000° à 16000°, tripleraît ce rayon, avec le même coefficient. La dilatation cubique serait égale à 27. La densité du Soleil, en le supposant ramené à zéro, atteindrait 38, c'est-à-dire dépas-

serait celle de tous les corps solides connus et même leur densité limite sous très haute pression. Elle serait beaucoup plus grande aussi que la limite indiquée plus haut par l'accroissement de densité des planètes avec leur rapprochement du Soleil.

10. **Pression à la surface du noyau et masse de l'atmosphère.** — Si on désigne par $p_i$ la pression sur la couche, où a lieu l'inflexion de la courbe des densités, et qui délimite le noyau et l'atmosphère, sa valeur s'obtient en faisant $\rho = \frac{1}{3}\rho_0$ dans la formule des gaz réels. On a

$$p_i = \frac{p_1}{2}\frac{T}{T_1}\frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{\rho_0 RT}{2\mu}. \tag{44}$$

Or à la température de 0° C, c'est-à-dire $T = 273 = T_1$, on a d'après la règle de Sarrau $\rho_0 = 1000\ \rho_1$ environ pour tous les gaz. On a donc $p_i = 500\ p_1$. L'inflexion de la courbe des densités aurait lieu dans ce cas-là à une pression de 500 atm. seulement, quel que soit le gaz ou le mélange gazeux formant l'atmosphère.

Cette pression croît avec la température. Elle dépend, comme la formule l'indique, de la valeur $\rho_0$ de la densité limite à la température T. On voit facilement qu'elle tend vers une limite voisine de 1500 atm. pour les hautes températures.

Ainsi pour toutes les températures stellaires, la pression d'inflexion, qui délimite le noyau et l'atmosphère, variera assez peu. Les conditions restent étroitement délimitées. Le problème général de la nature de l'équilibre et de l'évolution des étoiles ne sera pas très différent de celui relatif au Soleil.

Nous appellerons *atmosphère* la partie gazeuse située au-dessus de la couche d'inflexion et *noyau* la partie située au dessous. La zone de transition sera la surface et formera la photosphère, surface visible située un peu au-dessus de la surface réelle du noyau, comme on le verra plus loin.

On peut déterminer facilement la masse absolue et relative de l'atmosphère connaissant la vitesse de variation de la densité sur la couche d'inflexion. On a, S étant la surface de l'astre,

$$(45) \qquad \frac{m}{M} = \frac{p_i S}{\gamma M} = \frac{3p_i}{\gamma D r_1} = \frac{3\,RT}{2\gamma\mu r_1} = \frac{3}{2\alpha} = \frac{2}{9}\frac{1}{\rho'_1}$$

La valeur de $\mu$, qui est ici le poids moléculaire du noyau, correspond à la densité moyenne D. Nous avons trouvé $\alpha = 3850$ et $\rho'_1 = 570$ avec $\mu = 1$. Nous avons vu que la valeur probable de $\mu$ est 220.

Les valeurs de $\alpha$ et $\rho'_1$ sont à multiplier par ce nombre. On obtient $\alpha = 850.000$ et $\rho'_1 = 125.000$. On en déduit que la masse de l'atmosphère est 560.000 fois plus petite que celle du noyau ou de la masse totale. Comme la dilatation du Soleil est certainement comprise entre 4 et 12 fois le volume qu'il aurait à zéro degré, et par conséquent $\mu$ compris entre 110 et 330, ce nombre l'est aussi entre 280.000 et 840.000.

Il faut remarquer, en outre, que cette masse de l'atmosphère est indépendante de la nature du gaz qui la compose, puisque la pression d'inflexion $p_i$ reste sensiblement la même pour les différents gaz. La hauteur seule de cette atmosphère, au-dessus de sa couche d'inflexion, variera avec la densité du gaz, comme on le verra plus tard.

La masse de l'atmosphère est 1 million de fois plus petite que celle de la Terre. La masse relative de l'atmosphère solaire serait donc deux fois plus grande que celle de la Terre.

Il est intéressant également de calculer la masse par centimètre carré de cette atmosphère. Sur le Soleil la pesanteur est 28 fois plus grande que sur la Terre, où 1 atm. représente à peu près une masse d'air de 1 kg. cm², exactement 1.033 grammes. Pour 1.500 atm. nous aurons sur le Soleil 1.500 : 28 = 54 kg. cm². Cette valeur ne dépend pas de la nature du gaz. Même en admettant l'atmosphère solaire composée uniquement d'hydrogène, il n'y aura que 54 kg. au-dessus de la couche, où la densité de l'hydrogène croît rapidement vers sa densité limite. Sur Jupiter on aura 1.000 : 2,8 = 360 kg. cm² pour la masse de l'atmosphère.

On voit que l'épaisseur de l'atmosphère varie en raison inverse de la masse de l'astre. On verra plus tard que les étoiles de masse plus grande que le Soleil sont aussi plus chaudes et ont une atmosphère plus faible et surtout hydrogénée. Ce sont bien des étoiles blanches, type Wolf-Rayet. Les étoiles de masse plus faible sont moins chaudes avec une atmosphère plus épaisse et plus absorbante. Ce sont les étoiles rouges. Ces déductions rendent assez bien compte des apparences observées et permettent d'appuyer l'étude des atmosphères stellaires sur des bases sérieuses.

11. **Calculs numériques de la variation rapide de la densité entre l'atmosphère et le noyau. Stabilité de la surface du noyau.** — On peut calculer d'une façon précise la variation de la densité avec la profondeur.

En prenant pour origine la couche où se produit l'inflexion de la courbe des densités déterminée précédemment où $\rho = \frac{1}{3}\rho_0$ on obtient

$$(46)\quad L\frac{p}{p_i} + \frac{p - p_i}{2p_i} = \alpha x, \qquad L\frac{2\rho}{1-\rho} + \frac{13\rho - 1}{2(1-\rho)} = \alpha x$$

Pour une température de 6000° et pour l'hydrogène dissocié, $\mu = 1$, on obtient le tableau suivant qui donne la densité $\rho$ à une distance $x$ de la couche d'inflexion ($x$ en kilomètres).

| $\rho =$ | 0.01 | 0.1 | 0.3 | 1/3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x =$ | 780 | 350 | 42 | 0 | 85 | 220 | 386 | 2100 |

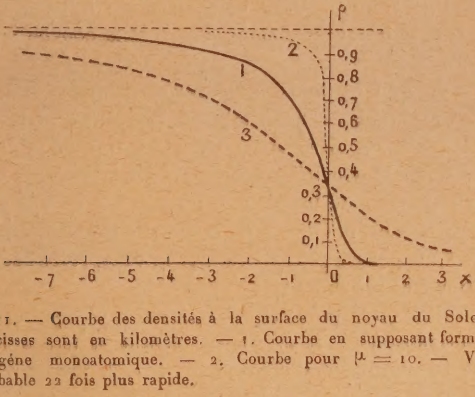


Fig. 11. — Courbe des densités à la surface du noyau du Soleil. Les abscisses sont en kilomètres. — 1. Courbe en supposant formé d'hydrogène monoatomique. — 2. Courbe pour $\mu = 10$. — Variation probable 22 fois plus rapide.

Pour des conditions différentes les valeurs de $x$ seront inverses des nouvelles valeurs de $\alpha$. La courbe 1 de la figure 11 représente la variation de la densité dans le cas du Soleil avec $\mu = 1$, la courbe 2, en pointillé, dans le cas où le gaz aurait une masse moléculaire $\mu = 10$. On re-

marquera que les abscisses sont données en millièmes du rayon et par conséquent quelle est la rapidité de la variation. On trouve une densité égale à 0,9 de la densité centrale à 2.100 km. de profondeur, c'est-à-dire à trois millièmes du rayon. On peut considérer la densité au delà comme égale à la densité limite et constante.

La figure ne représente la variation de la densité que dans le voisinage de la surface du noyau. Le centre du Soleil se trouverait à 6 mètres à gauche. On voit à quel point la densité serait bien uniforme.

La courbe 3 représente la variation de densité avec $\mu = 1$, en supposant au Soleil un rayon double avec une température double. Dans cette dernière hypothèse, on aurait encore la courbe 1 pour $\mu = 4$ et la courbe 2 pour $\mu = 40$.

On a vu que le poids moléculaire probable était égal à 220. Les nombres $x$ du tableau seraient à diviser par 220. On obtient une densité égale à 0,9 de la densité limite, ou de la densité moyenne, à *10 kilomètres seulement* au-dessous de la couche, où l'on a $\rho = 1/3\ \rho_0$. La densité passe de 0,1 à 0,9 de la densité moyenne, ou de 0,14 à 1,26 par rapport à l'eau, pour une profondeur de 11 kilomètres seulement.

On voit à quel point *il y a séparation brusque et nette entre l'atmosphère et le noyau.* L'atmosphère à faible densité se comportera comme un gaz, le noyau à forte densité se comportera comme un liquide.

La variation de densité à la surface du noyau du Soleil serait plus rapide qu'à la surface de la Terre. En effet, en passant de la densité de l'atmosphère (1,3 gramme par litre) à celle du sol (2,5 kg. par $dm^3$,) avec la transition de la mer, d'épaisseur moyenne 3.600 m., l'accroissement

de densité serait de 2.000 fois sa valeur sur 3.600 m. ou de 100 fois sa valeur sur 180 m. Sur le Soleil la densité, qui serait de 1.26 à 10 km. au-dessous de la surface limite, tomberait à 0.0015 de la densité moyenne, 1,41, c'est-à-dire 0,0021 par rapport à l'eau, à 40 km. au-dessus. La densité croît donc de 600 fois sa valeur sur 50 km. seulement ou en moyenne de 100 fois sur 8.330 m.

Mais le rayon du Soleil est 110 fois plus grand que celui de la Terre. Par rapport à celui de la Terre, l'accroissement de densité serait donc de 100 fois sur 76 m., soit plus de deux fois plus rapide.

La densité à la surface du noyau serait égale au tiers de la densité moyenne 1,41. Son poids serait à multiplier par 28, rapport de la pesanteur à la surface du Soleil à la pesanteur à la surface de la Terre.

Le poids de la couche serait de 13,1 gramme par $cm^3$, soit la densité du mercure. Par conséquent, le travail à dépenser pour soulever les éléments de cette couche serait le même que si la Terre était recouverte d'une couche de mercure au lieu d'une couche d'eau. Les vagues y seraient 13 fois moins hautes. On voit à quel point *la stabilité de la surface du noyau serait assurée*. Les dénivellations et différences de densité y seraient tout au plus de l'ordre des vagues de l'océan.

On peut aussi représenter les variations de densités par une formule analogue à celle de Roche, où D est la densité moyenne du Soleil,

$$\rho = D(1 - ar^n)^{n'} \tag{47}$$

Avec la condition que pour $r = 1$ on ait à la surface

$$\rho = \frac{1}{3}\rho_0 = \frac{1}{3}D, \qquad \rho_1 = \frac{4}{27}\alpha \qquad \text{et} \qquad \rho'' = 0. \tag{48}$$

On trouve, en négligeant 1 devant $\rho'_1$ qui est très grand, les relations,

$$(49)\quad an' = 1, \qquad 3(1-a)^{n'} = 1, \qquad n = \frac{4}{9}(1-a)\alpha$$

On en déduit $a = 0{,}174$ et $n' = 5{,}75$, valeurs indépendantes de $\alpha$. Pour le Soleil en prenant le poids moléculaire minimum $\mu = 1$ on aura $\alpha = 3850$ et $n = 1410$. La formule donne alors, avec ces coefficients, sensiblement les mêmes nombres que les calculs directs de la formule (46) et le tableau ci-dessus. On a vu que pratiquement $\mu$ et $n$ sont à multiplier par 220, On aura $n = 310.000$.

12. **Etude générale de l'équilibre physique d'un astre dans le cas d'une température uniforme.** — Reprenons la formule qui donne la variation de la densité $\rho$ en fonction de la distance au centre $r$ (on a pris $\rho_0 = 1$)

$$(50)\quad \rho' = \frac{d\rho}{dr} = -\frac{\mu}{RT}\gamma\rho\,(1-\rho)^2$$

On voit que $\rho'$ tend toujours vers zéro, au centre avec $\gamma$, et à l'extérieur avec $\rho$. *Il y a donc toujours un point d'inflexion de la densité à l'intérieur d'un astre gazeux.*

Ce point d'inflexion est défini par la condition $\rho'' = 0$. Pour le déterminer on dérive de nouveau l'expression ci-dessus. La dérivée logarithmique donne

$$(51)\quad \frac{\rho''r}{\rho'} = \frac{\rho' r}{\rho}\,\frac{1-3\rho}{1-\rho} + \frac{\gamma' r}{\gamma}$$

Appelons $m$ la masse contenue dans la sphère de rayon $r$ et D la densité moyenne correspondante, on a

$$(52) \qquad \gamma = f\frac{m}{r^2} = \frac{4}{3}f\pi Dr, \qquad \frac{\gamma' r}{\gamma} = \frac{D'r}{D} + 1.$$

Or, d'après la définition de $m$ on a

$$(53) \qquad Dr^3 = 3\int_0^r \rho r^2 dr$$

En dérivant par rapport à $r$ on obtient

$$D'r^3 + 3r^2D = 3\rho r^2, \qquad -\frac{D'r}{D} = 3\left(1 - \frac{\rho}{D}\right).$$

$$(54) \qquad \frac{\gamma' r}{\gamma} = 3\frac{\rho}{D} - 2.$$

On aura $\gamma' = 0$ pour $\rho = \frac{2}{3}D$, c'est-à-dire que la pesanteur sera maximum au point où la densité égale les 2/3 de la densité moyenne.

Un cas limite remarquable de la position de ce point d'inflexion c'est celui où les deux termes de l'expression de $\rho''$ sont nuls à la fois, c'est-à-dire quand on a

$$\rho_1 = {}^1/_3\rho_0 \qquad \text{et} \qquad \rho_1 = {}^2/_3D_1 \qquad \text{d'où} \qquad D_1 = \frac{1}{2}\rho_0$$

Le point d'inflexion a lieu alors exactement sur la couche où la densité $\rho$ est égale au tiers de la densité limite et qui coïncide avec le maximum de la pesanteur. La densité moyenne D du noyau est alors égale à la moitié de la densité limite du gaz $\rho_0$. On verra que dans ce cas la valeur de $\alpha$ est voisine de 6, et celle de $\rho_1'$ voisine de 3/4. Ce paramètre $\alpha$ a les dimensions d'un nombre. Il

contient le potentiel de gravitation de l'astre et les constantes physiques du gaz comme on l'a vu. Sa valeur renseigne immédiatement sur la variation plus ou moins rapide de la courbe des densités. C'est le *paramètre de condensation*.

Pour tous les astres plus condensés que ce cas limite, $D > \frac{1}{2}\rho_0$, c'est-à-dire pour lesquels la densité de l'astre est plus grande que la moitié de la densité limite du gaz, la couche d'inflexion où la densité varie brusquement pour constituer le noyau, reste toujours très voisine de celle où l'on a $\rho = 1/3\ \rho_0$ et pratiquement se confond avec elle. Pour les astres de densité plus faible, la couche d'inflexion s'éloignerait au contraire de la couche où l'on a $\rho = 1/3\,\rho_0$.

13. **Existence de deux groupes d'astres, les uns condensés, les autres dilatés. Deux cas limites extrêmes, un cas limite intermédiaire.** — On peut donc distinguer dans un astre gazeux en équilibre *trois cas limites nettement définis* et englobant tous les autres cas. Ils sont caractérisés par la valeur de la densité moyenne $D_1$ ou du paramètre $\alpha$ et par la position du point d'inflexion $\rho'' = 0$.

Le premier cas est celui des astres fortement *condensés*, analogues au Soleil où l'on a $D_1 = 1 = \rho_0$ et $\alpha$ considérable. On a $\rho'' = 0$ pour $\rho_1 = 1/3\,\rho_0$.

Pour un astre comme Jupiter en lui supposant une température interne de 3.000 degrés $\alpha$ serait seulement 50 fois plus petit que pour le Soleil. On aurait encore un noyau très net, une condensation très tranchée.

Le cas diamétralement opposé est celui des astres for-

tement *dilués*, nébuleuses froides, où l'on a $\alpha$ et D voisins de zéro et $\rho'' = 0$ pour $\gamma' = 0$.

*Le cas limite intermédiaire* est caractérisé par $D_1 = 1/2\,\rho_0$ avec $\alpha$ de l'ordre des unités. On a $\rho'' = 0$ pour les deux valeurs simultanées $\rho_1 = 1/3$ et $\gamma' = 0$. Les caractéristiques de ce cas intermédiaire sont celles des astres à haute température et faibles densités.

La densité à l'intérieur du noyau pourrait se représenter assez exactement dans le cas limite intermédiaire par une formule de ROCHE, dont les coefficients seraient 3/4 et 5/9.

$$\rho = {}^3/_4(1 - {}^5/_9 r^2)$$

Dans ce cas limite on trouve alors que le noyau du Soleil aurait un rayon 19 fois plus grand, une température 5.000 fois plus grande, c'est-à-dire de 30 millions de degrés, une densité moyenne 10.000 fois plus faible, c'est-à-dire à peine égale au dixième de celle de l'air, et de l'ordre de celle des étoiles les plus diffuses, étoiles géantes. Nous verrons qu'il est inutile cependant de supposer de pareilles températures pour expliquer la constitution des étoiles géantes.

On voit par les exemples ci-dessus que les astres condensés, à inflexion nette des densités, et noyau bien distinct de l'atmosphère, comprendront l'immense majorité des astres gazeux, aussi bien de faibles masses que de grands rayons, à plus forte raison si les astres de grand rayon ont également de fortes masses.

La masse de l'atmosphère serait égale environ à la moitié de celle du noyau, au tiers de la masse totale, en admettant que l'attraction reste constante. Mais la formule des densités montre que l'atmosphère s'étendrait

à l'infini, si la température restait également constante à l'extérieur du noyau comme à l'intérieur. En tenant compte de la variation de l'attraction on verrait qu'il faut que la température décroisse au moins en raison inverse de la distance pour que l'atmosphère se limite. On verra plus loin, à propos des étoiles géantes, que cette loi de décroissance de la température dans l'atmosphère, peut correspondre à un cas limite de l'équilibre adiabatique.

14. **Variation de la température du noyau avec le rayon de l'astre.** — On a vu que la valeur de tous les éléments d'un astre dépendait de la valeur du coefficient caractéristique $\alpha$ à la surface, défini par

$$\alpha = f\frac{M}{r}\frac{\mu}{RT} = \frac{4}{3}\pi f\frac{\mu}{R}\frac{\rho_0 r^3}{T}. \tag{56}$$

Si on considère le même astre, M reste constant, $\mu$ reste le même, tant que l'ionisation ne vient pas modifier la composition du noyau, c'est-à-dire tant que l'astre reste fortement concentré, avec grandes pressions dans le noyau. La constance de la masse donne la relation

$$\rho_0 r^3 = \rho_{01} r_1^3 \tag{57}$$

Cette relation jointe à l'une des lois de dilatation, que l'on choisira pour déterminer $\rho_0$ en fonction de T, permettra d'éliminer deux des trois variables $\rho_0$, $r$, T et de déterminer $\alpha$ en fonction de l'une d'elles, et par suite toutes les autres.

Nous verrons d'ailleurs au n° 16 que pratiquement, quel que soit l'équilibre réalisé, le noyau est *sensiblement* à la même température du centre à la surface, nous

pouvons donc considérer comme général, le cas de la température uniforme, et les calculs correspondants.

On aura dans tous les cas, pour les astres fortement concentrés

$$(58) \qquad \frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{M\mu}{M_1\mu_1}\frac{r_1 T_1}{rT} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{r_1 T_1}{rT}$$

La seconde forme s'appliquera à la variation du rayon $r$ et de la température T du même astre.

On posera ensuite pour la formule de dilatation, qui détermine la densité limite,

$$(59) \qquad \frac{\rho_0}{\rho_{01}} = \frac{1 + \varepsilon_1 T_1}{1 + \varepsilon T}.$$

$\rho_{01}$ étant la valeur de cette densité à la température $T_1$. Le coefficient de dilatation est de l'ordre de celui des liquides et des solides, à basse température. Il croît et tend vers celui des gaz quand la température croît. Pour les hautes températures réalisées dans les étoiles, on peut considérer cette limite comme atteinte, au moins en première approximation, alors $\varepsilon = \varepsilon_1$, et négliger 1 devant $\varepsilon T$, assez grand. On a la formule simplifiée

$$(60) \qquad \rho_0 T = \rho_{01} T_1,$$

La densité limite varie sensiblement en raison inverse de la température. Ces formules nous donnent alors

$$(61) \qquad \frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{r_1 T_1}{rT} = \frac{r_1^4}{r^4}, \qquad \frac{T}{T_1} = \frac{r^3}{r_1^3},$$

$\alpha$ varie en raison inverse de la 4e puissance du rayon. Il en est de même des pressions d'ailleurs. La température varie proportionnellement au volume.

En donnant au Soleil un rayon double, on aurait une température du noyau 8 fois plus grande. En admettant que la température superficielle varie dans la même proportion elle deviendrait égale à 48.000 degrés. Toutes les températures des étoiles sont inférieures à ce nombre.

L'accroissement de densité, avec la profondeur, à la surface du noyau, serait encore extrêmement rapide. Elle passerait de 0,1 à 0,8 de la densité moyenne sur une profondeur de 352 km. au lieu de 11, soit 32 fois plus grande, ou seulement 16 fois plus grande proportionnellement au rayon. Cet accroissement serait seulement 8 fois moins rapide que celui du passage de l'atmosphère au sol ou sur la Terre. On aurait ici

$$\frac{d\rho}{\rho_0} = -\frac{4}{27}\alpha\frac{dr}{r} = -\frac{4}{27}\alpha_1\frac{r_1^4}{r^5}dr.$$

et $d\rho$ sera divisé par 16 ou par 32 selon que l'on mesure la profondeur relative $\frac{dr}{r}$ ou absolue $dr$.

La masse de l'atmosphère par cm², serait inverse de la pesanteur à la surface du noyau, la pression d'inflexion y étant sensiblement constante. Elle serait donc 4 fois plus grande, soit 216 kg. par cm².

La hauteur, en kilomètres, où l'on retrouverait la même pression et à peu près les mêmes conditions de limitation de la photosphère, serait 32 fois plus grande que sur le Soleil actuel.

On aurait

$$\alpha\frac{x}{r} = \text{C}^{\text{te}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{x_1} = \frac{r}{r_1}\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{r^5}{r_1^5}.$$

On voit ainsi comment la photosphère dépasserait la

zone des vapeurs métalliques, et les seules raies visibles seraient celles de l'hydrogène, et plus bas de l'hélium. Nous aurions une étoile O ou B, même pour des températures bien inférieures.

A ces températures de 50.000 degrés, la pression de radiation chasserait au loin les fines particules, qui constituent normalement la couronne. Elles formeraient une enveloppe extérieure, une seconde photosphère, à la limite de l'atmosphère dilatée, et l'on aurait plutôt une étoile géante. Nous verrons plus loin la *température critique* à laquelle l'atmosphère tendrait à s'échapper et ne serait retenue elle-même que par une enveloppe de ce genre.

15. **Cas de l'équilibre adiabatique avec formule des gaz réels.**— Dans le cas de l'équilibre isothermique, à température uniforme (qui a été étudié dans les numéros précédents) la loi des gaz réels montre que la courbe des densités a un point d'inflexion, quand la densité atteint le tiers de la densité limite du gaz, ce qui a lieu pour une pression de 1500 atm. environ. La densité croît alors très rapidement, atteint la densité limite et reste sensiblement constante pour les 99 centièmes du rayon. Dans le cas de la densité constante c'est la température qui varie très vite à la surface, pour rester ensuite constante, la variation maximum allant de 1 à 3 et pratiquement de 1 à 2, comme on le verra dans le chapitre suivant.

L'équilibre adiabatique, compris entre ces deux cas extrêmes, est peut-être plus près de la réalité. L'étude de ce cas permet d'aboutir à deux formules donnant la variation de la densité et de la température avec le rayon, qui se rattachent étroitement à celles des deux

cas précédents, ce qui permet de déterminer complètement ces deux variations.

En introduisant le covolume $b$, dans la formule des gaz parfaits, l'équation différentielle de Poisson pour l'équilibre adiabatique devient par un calcul simple

$$\frac{dp}{p} = \frac{C}{C - c}\frac{dT}{T} + \frac{db}{v - b} \tag{62}$$

Elle donne ensuite pour la relation entre la température et la densité $\rho$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{C - c}{c}\frac{dv}{v - b} = \frac{C - c}{c}\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}\frac{d\rho}{\rho} \tag{63}$$

où $\rho_0$ est la densité limite correspondant au covolume $b$.

On obtient finalement, pour la variation de la température et de la densité, en fonction du rayon $r$, au moyen de la formule générale de l'accroissement de la pression $dp = -\gamma \rho\, dr$,

$$\left(1 + \frac{p}{R}\frac{C - c}{c}\frac{db}{dT}\right)\frac{dT}{dr} = -\frac{\gamma\mu}{R}\frac{C - c}{C}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \tag{64}$$

$$\left(1 + \frac{p}{R}\frac{C - c}{c}\frac{db}{dT}\right)\frac{d\rho}{dr} = -\frac{\gamma\mu}{RTC}\frac{c}{\rho}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \tag{65}$$

$db$ dépend uniquement de T et constitue un terme de correction négligeable en première approximation, en tout cas positif. Le facteur de $dT$ est donc plus grand que l'unité, et la variation de T plus grande qu'en négligeant ce terme. Enfin $\mu$ est le poids moléculaire du gaz, $\gamma$ l'attraction sur la couche $r$.

Or, la formule de variation de T dans le cas d'une densité constante est la même que la formule (64) où l'on

fait $c = 0$. La température variera ici de la même façon que dans ce cas extrême, mais plus lentement, et tend vers une limite plus basse.

Si l'on fait $c = C$ dans (65) on obtient la formule de variation de la densité dans le cas d'une température constante, la densité variera donc de la même façon que dans ce cas extrême, mais aussi plus lentement, et dans de moindres limites. La variation de la température et de la densité reste bien comprise entre les deux variations extrêmes étudiées comme cas limite, température uniforme et densité uniforme.

Si on relie le volume $b$ à la température T par la formule générale de la dilatation, le coefficient étant complètement indéterminé pour conserver la généralité des formules, on peut écrire

$$db = K dt, \qquad d(\rho_0 T) = 0 \quad . \quad \rho_0 T = \rho_{01} T_1$$

et l'on obtient, pour la relation entre la température et la pression,

$$T\left(\frac{1 + ap}{p}\right)^{\frac{C-c}{C}} C^c \qquad \frac{T_0}{T_1} = \left(\frac{1 + ap_1}{ap_1}\right)^{\frac{C-c}{C}}$$

Cette dernière formule détermine la température centrale $T_0$ en fonction de la température et de la pression à la surface du noyau, $a$ est une constante dépendant uniquement du paramètre $\alpha$. Dans le cas du Soleil on a $T_0 = 2{,}17\ T_1$.

*La température centrale dans le cas de l'équilibre adiabatique ne peut guère dépasser le double de la température superficielle du noyau.*

Si on différentie de nouveau la formule (65) en faisant $d^2\rho = 0$, on trouve un point d'inflexion de la

courbe des densités, quand celle-ci a atteint le cinquième de la densité limite du gaz, dans le cas où le co-volume est considéré comme constant et une valeur moitié moindre dans le cas général. On obtient dans le cas du Soleil le tableau général suivant

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 10 | 12 | 15 | 20 | $\infty$ |
| $\rho =$ | 0.47 | 0.68 | 0.85 | 0.98 | 1.15 | 1.25 | 1.28 | 1.30 | 1.31 | 1.33 | 1.41 |
| $T =$ | 8000 | 9.6 | 11.0 | 12.1 | 13.8 | 15.5 | 16.3 | 17.0 | 17.4 | 17.8 | 19.6 |
| $p =$ | 1640 | 3.3 | 5.6 | 8.3 | 14.3 | 24.2 | 31.1 | 38.3 | 49.2 | 67.5 | $10^9$ |

La première ligne donne la profondeur en kilomètres, la seconde la densité correspondante. Elle atteint déjà les 9 dixièmes de la densité limite à 10 kilomètres de profondeur. On a pris à la surface du noyau une densité égale au tiers de la densité moyenne pour rendre les résultats comparables au cas de la température uniforme. On retrouve à peu près la même variation de la densité. On a pris 8000 degrés comme température à la surface. On aurait moins de 20000 degrés au centre (19600). La température atteint déjà les 9 dixièmes de la température centrale limite à 20 kilomètres seulement. On a bien là encore très sensiblement *un noyau de densité homogène et de température uniforme.*

On voit aussi que la compression adiabatique, dans le cas de courants de convection, ne produirait pas le dixième de la chaleur totale depuis 20 kilomètres au-dessous du noyau jusqu'au centre. On peut dire que les phénomènes propres à l'équilibre adiabatique deviennent négligeables à l'intérieur d'un astre. Les phènomènes de régénération de chaleur par frottement ou rayonnement seront beaucoup plus considérables et les seuls à considérer. Les variations de température par détente et compression n'in-

terviendront réellement qu'à la surface du noyau et dans l'atmosphère, c'est-à-dire dans une zone d'épaisseur assez faible, toujours plus faible que dans le cas de l'équilibre isotherme, c'est-à-dire de l'ordre de 50 à 100 kilomètres, au plus, entre la surface du noyau et la photosphère.

Pratiquement nous aurons à distinguer trois zones d'équilibre bien définies dans le Soleil et les étoiles. Le noyau comprenant sensiblement toute la masse, en équilibre homogène et isotherne. La zone d'équilibre adiabatique, et des violents courants de convection, entre la surface du noyau et la photosphère. Enfin la zone extérieure, ou atmosphère proprement dite, en équilibre plutôt statique ou radiatif. Nous retrouvons les parties analogues sur la Terre, la masse solide et liquide, la basse atmosphère avec courants ascendants jusqu'à 10 kilomètres et la haute atmosphère en équilibre radiatif.

16. **L'intérieur d'un astre gazeux doit avoir sensiblement la même température et la même densité dans toute la masse. Leur variation maximum.** — La formule des gaz réels permet d'esquisser une démonstration générale de l'accroissement très rapide de la densité et de la température à partir de la surface, pour rester ensuite sensiblement constante dans toute la masse.

L'équilibre mécanique exige, à chaque instant, que la densité croisse de la surface au centre, à l'intérieur d'un astre. L'équilibre thermique permanent exige également que la température soit croissante vers le centre. Les lois physiques des gaz permettent d'établir alors que dans tout astre gazeux analogue au Soleil, la densité et la température doivent croître toutes deux très rapidement

à la surface, puis tendre très vite vers une limite et rester ensuite sensiblement constantes jusqu'au centre.

La formule des gaz réels, valable pour les pressions élevées des astres peut s'écrire, comme on l'a vu,

$$p(v - b) = p\mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = RT \qquad (66)$$

où $v$ et $\mu$ sont le volume et le poids moléculaire. Le covolume $b$, ou la densité limite $\rho_0$, sont introduits dans la formule des gaz réels par toutes les démonstrations mathématiques. De plus ils sont fonction de la température seule. La densité limite est, à basse température, de même ordre que celle du solide ou du liquide. Elle diminue ensuite avec la température. Elle se comportera donc comme la densité d'un corps qui de solide devient liquide puis gazeux. Or pour un tel corps, l'accroissement relatif de volume croîtra de plus en plus avec la température. Le coefficient de dilatation est toujours croissant avec la température. L'accroissement devient constant pour les gaz parfaits, cas limite. On aura avec la *seule hypothèse* que le coefficient de dilatation du covolume n'est pas décroissant,

$$b = v_0(1 + \alpha T), \quad \frac{db}{b} = \frac{dT}{T} + \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad \frac{d\alpha}{dT} \geqslant 0 \qquad (67)$$

ou

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{T}{b}\right) \leqslant 0, \qquad \frac{d}{dT}(\rho_0 T) \leqslant 0,$$
$$\rho_0 T \leqslant \rho_{01} T_1 \quad \text{si} \quad T \geqslant T_1$$

La formule des gaz réels ci-dessus (66) peut d'ailleurs s'écrire

$$\frac{1}{\rho T} = \frac{1}{\rho_0 T} + \frac{R}{\mu p}, \qquad \text{d'où} \qquad \rho T < \rho_0 T \leqslant \rho_{01} T_1 \qquad (68)$$

Puisque la pression $p$ croît très vite dans les astres à forte masse, analogues au Soleil, comme le montrent les calculs pratiques, le dernier terme en $p$ de cette formule (68) devient rapidement négligeable pour des pressions de quelques milliers d'atmosphères. Le produit $\rho T$ tend très vite vers sa limite $\rho_{01} T$ qui est plus petite que $\rho_{01} T_1$. Le produit $\rho T$ varie, dans tous les cas, comme la densité $\rho$ dans le cas limite de l'équilibre isothermique, ou comme la température T dans le cas de la densité constante, les deux cas limites extrêmes. Comme dans le cas général, la densité $\rho$ et la température T sont toutes deux croissantes, de la surface au centre, elles tendent nécessairement toutes deux vers une limite atteinte très rapidement et restent ensuite sensiblement constantes jusqu'au centre.

La densité ne pourrait continuer à croître que si la température, après avoir passé par un maximum était décroissante vers le centre. C'est d'ailleurs ce qui a dû se produire dans la formation normale d'un astre, mais la modification de la densité moyenne serait faible. Elle serait encore croissante si la masse se comportait comme un mélange plus ou moins homogène de liquides ou de solides, mais pour une *masse gazeuse quelconque* le mélange se présente partout comme sensiblement homogène d'après les lois des gaz. Dans le cas de la température constante en particulier, le calcul montre que la proportion des différents constituants reste la même à l'intérieur du noyau (*C. R.* t. 167, p. 722 (1918).

Il n'en est plus de même dans le cas de la loi des gaz parfaits et S. Chapmann a montré que dans l'hypothèse de l'équilibre radiatif envisagée par Eddington, il y aurait séparation complète des éléments par ordre de densité et

dans les couches superficielles ne pourraient apparaître que les éléments légers et non les vapeurs métalliques[1] (M. N. t. 77. p. 540-548, 1917). C'est ce qui a lieu déjà dans l'atmosphère terrestre où, d'après la décroissance de la pression, l'hydrogène seul doit subsister à partir de 150 kilomètres, même en admettant que sa pression à la surface soit très faible. (Elle est évaluée à environ un millionième d'atmosphère).

On conclut des démonstrations précédentes que toute étoile normale doit être composée d'une masse intérieure dont la densité et la température sont sensiblement uniformes. La partie superficielle, à densité et à température variables, atteindrait à peine la centième partie du rayon de l'astre. La densité interne ou moyenne doit-être égale à la densité limite du mélange gazeux qui constitue l'astre, à la température de l'intérieur. Cette densité ne dépend que de cette température.

Cette constitution interne très simple permet ainsi facilement l'étude des couches superficielles, qui reposent sur le noyau homogène. Elle permet également l'étude de l'évolution des astres dans le passé et dans l'avenir. On verra d'ailleurs que les conditions physiques, rayon et température, sont variables seulement dans des limites assez étroites, où l'interpolation des lois connues peut se faire légitimement.

La démonstration ci-dessus permet de déterminer le maximum de la température centrale ou intérieure. Dé-

[1] Il en serait de même à plus forte raison dans les *étoiles géantes* si elles étaient formées d'une masse gazeuse s'étendant normalement aux distances mesurées. C'est pourquoi il faut absolument qu'elles aient une constitution différente des étoiles naines ou étoiles normales.

signons par $T_0$ la température à la surface du noyau, c'est-à dire sur la couche d'inflexion, et par $\rho_{01}$ la densité limite à cette température et $\rho_1$ la densité sur cette couche on aura à l'intérieur.

$$\rho_0 T \leqslant \rho_{01} T_1 \qquad \rho_1 = \frac{1}{3}\rho_{01}$$

Désignons par $T_0$ la température centrale ou température intérieure limite, la densité limite correspondante est égale à la densité moyenne, puisque cette densité limite est très vite atteinte. On aura donc pour cette valeur de T,

$$DT_0 \leqslant \rho_{01} T_1 \quad \text{avec} \quad D \geqslant \rho_1.$$

La densité moyenne D est en effet plus grande que la densité $\rho_1$ à la surface du noyau. On en déduit $T_0 \leqq 3T_1$. *La température intérieure d'un astre ne peut pas dépasser 3 fois la température superficielle du noyau.* On aurait la valeur maximum dans le cas où la densité du noyau resterait rigoureusement constante.

Dans le cas d'une température constante on avait obtenu $D = \rho_{01} = 3\rho_1$. La densité moyenne, ou limite, était égale à 3 fois la densité superficielle du noyau. C'est la variation maximum de la densité. Dans les autres cas d'équilibre la variation de la densité et de la température à l'intérieur du noyau sera comprise entre ces limites très étroites.

La formule des gaz réels, et la variation du covolume avec la température, exclut absolument les millions de degrés pour la température interne des astres. Les formules connues restent applicables.

## CHAPITRE IV

### ÉQUILIBRE PHYSIQUE D'UN ASTRE GAZEUX CAS D'UNE DENSITÉ UNIFORME

1. **Les deux cas limites de température uniforme et de densité uniforme.** — Dans une masse sphérique en équilibre la densité et la température doivent décroître du centre à la surface.

Si la densité était plus faible sur une couche que sur la couche immédiatement supérieure, la première prendrait la place de la seconde. De même si la température était plus faible sur cette couche que sur la seconde, celle-ci rayonnerait de la chaleur vers la première jusqu'à l'égalisation des températures. L'équilibre réel sera donc compris entre deux cas limites, celui où la densité est uniforme, la même du centre à la surface, et celui où la température est uniforme et la densité variable.

Dans le premier cas, où la densité est uniforme, la variation de température du centre à la surface est maximum, car, si cet accroissement de température diminuait sur une couche, la température de cette couche serait un peu plus grande, et sa densité un peu plus faible, que celle de la couche immédiatement au-dessus. Il y aurait rupture de l'équilibre. Le rapport entre la température centrale et la température superficielle est donc maximum dans ce cas. De même ici la variation de la densité est nulle et minimum.

Dans le second cas, où la température est uniforme, la variation de densité, du centre à la surface, est maximum, car si la température baissait sur une couche élémentaire, la densité de cette couche croîtrait, et la différence de densité avec la couche immédiatement inférieure décroîtrait [1]. La variation de densité est donc bien maximum. Le rapport entre la densité centrale et la densité superficielle est également maximum.

Nous étudions dans ce chapitre le cas limite, où c'est la *variation des températures internes* d'un astre qui est *maximum*. On a étudié dans le chapitre précédent le second cas où la variation de la densité intérieure était maximum. Ces deux études se complètent.

Nous avons vu également dans le chapitre précédent que les deux cas même se confondaient en un seul, que la variation de la densité et de la température avait lieu seulement à la surface pour rester sensiblement uniformes dans l'intérieur de la masse. Nous pourrons donc étudier ici la variation générale de la température et du rayon au cours de l'évolution, et le maximum de la température. et *considérer les conclusions comme absolument générales*. Voir en particulier sur ce point une étude de A. Véronnet (*Bulletin astronomique* Nouvelle Série t. I, fasc. 2 et 3. 1922).

2. **Rapport de la température centrale et de la température superficielle. Formule générale.** — Dans une masse sphérique en équilibre la différentielle de la

[1] Il se pourrait que la densité de l'ensemble de la masse diminue quant la température croît. Il s'agit seulement ici d'une couche élémentaire. Il y a toujours, pour un gaz, dilatation avec l'accroissement de température.

pression, en fonction du rayon $r$ de la couche, est donnée par la formule suivante où $\gamma$ représente l'accélération de la pesanteur :

$$(1) \qquad dp = -\gamma dm = -\gamma\rho dr$$

Si la densité $\rho$ est constante, la pesanteur sur une couche est proportionnelle au rayon de cette couche

$$(2) \qquad \gamma = f\frac{m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi f\rho r = \gamma_1\frac{r}{r_1}$$

En intégrant (1) de $o$ à $r$, la pression de chaque couche sera donnée en fonction de la pression centrale $p_0$ par

$$(3) \qquad p_0 - p = \frac{1}{2}\gamma_1\rho\frac{r^2}{r_1},$$

$r_1$ est le rayon du noyau. On suppose qu'il est recouvert d'une atmosphère qui exerce à la surface la pression $p_1$ ou $p_i$ calculée pour l'inflexion des densités et la limitation du noyau. L'accroissement de la pression de la surface au centre [1] sera donnée par l'expression

$$(4) \qquad p_0 - p_1 = \frac{1}{2}\gamma_1\rho r_1.$$

La loi générale des gaz réels peut s'écrire

$$(5) \qquad p\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{RT}{\mu}\rho, \qquad p = \frac{RT}{\mu}\frac{\rho}{a},$$

où $\rho_0$ représente la densité limite du gaz à la température

[1] La pression obtenue ici dans le cas d'une densité constante est une *valeur minimum*. Pour la Terre on obtient pour la pression centrale 3,41 millions d'atmosphère et pour le Soleil 2,03 milliards d'atmosphère.

T et $u$ est défini par la seconde formule. R est la constante des gaz et $\mu$ la masse moléculaire du gaz considéré.

Appliquons cette formule (5) aux éléments du centre $p_0$, $T_0$, $\rho_{00}$ et de la surface $p_1$, $T_1$, $\rho_{01}$, en transportant dans (4), on aura :

$$(6) \qquad \frac{T_0}{u_0} - \frac{T_1}{u_1} = \frac{1}{2}\frac{\gamma_1 \mu r_1}{R} = \frac{1}{2}\alpha_1 T_1,$$

$$\alpha_1 = \frac{\gamma_1 \mu r_1}{R T_1} = f\frac{M}{r_1}\frac{\mu}{R T_1};$$

$\alpha_1$ est le paramètre caractéristique de l'astre qui contient les constantes astronomiques M et $r$, masse et rayon, et les autres constantes physiques $\mu$ et $T_1$ de l'astre à la surface. C'est le même paramètre de condensation qui définit également la courbe des densités dans le cas de la température constante. On en déduit,

$$(6)' \qquad \frac{T_0}{T_1} = \frac{\alpha_1 u_1 + 2}{2u_1} u_0 = \frac{\alpha_1 u_1 + 2}{2u_1}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{00}}\right).$$

Il faut introduire ici la loi de dilatation qui définira $\rho_{00}$ en fonction de $T_0$. On a, en considérant la formule de dilatation cubique,

$$(7) \qquad \frac{\rho_{00}}{\rho_{01}} = \frac{1 + \varepsilon_1 T_1}{1 + \varepsilon_0 T_0}.$$

où $\varepsilon$ est le coefficient de dilatation cubique relatif à la densité limite du gaz $\rho_0$. Ici $\varepsilon_1$ est sa valeur à la température superficielle $T_1$, et $\varepsilon_0$ sa valeur pour $T_0$. En première approximation, nous pourrons admettre que $\varepsilon$ est constant, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$.

La valeur $\rho_{00}$ de (7) portée dans (6) donnera finalement la formule

$$(8) \qquad \frac{2u_1}{\alpha_1 u_1 + 2}\frac{T_0}{T_1} + (1 - u_1)\frac{1 + \varepsilon_0 T_0}{1 + \varepsilon_1 T_1} = 1,$$

3. **Maximum de la température centrale du Soleil Elle est inférieure au triple et probablement au double de la température superficielle du noyau. Trois cas particuliers.** — Cette formule générale contient trois paramétres $\alpha_1$, $u_1$, $\varepsilon$. Ils prennent des valeurs particulières dans les *trois cas* qu'on peut distinguer pratiquement pour définir l'état physique des astres. On aboutit ainsi à trois formules simplifiées qui permettront des calculs pratiques.

1° Pour les *astres condensés*, comme le Soleil, où la valeur de $\alpha$ est très considérable, le premier terme de (8) est complètement négligeable [1]. De plus, la densité à la surface du noyau est le tiers de la densité limite du gaz, en délimitant le noyau par la même pression et la même atmosphère que dans le cas de T constant, du Chapitre précédent. Par conséquent, $u_1$ est égal à $\frac{2}{3}$ et (8) devient

$$(9) \qquad \frac{1 + \varepsilon_0 T_0}{1 + \varepsilon_1 T_1} = 3, \qquad u_1 = 1 - \frac{\rho}{\rho_{01}} = \frac{2}{3}.$$

En première approximation, si l'on néglige 1 devant $\varepsilon$ T (erreur de l'ordre de 0,1) et si l'on regarde la dilatation cubique comme constante (valeur actuelle), on a

$$(10) \qquad T_0 = 3T_1, \qquad \varepsilon_0 = \varepsilon_1,$$

[1] Pour le Soleil, $\alpha$ est de l'ordre du million, plus exactement 850.000.

C'est d'ailleurs la limite extrême qu'on obtient dans le cas d'une température superficielle très élevée, car alors 1 est complètement négligeable devant $\varepsilon T$ et les valeurs de $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_0$ deviennent égales à leur limite maximum, celle des gaz. Nous avons vu de plus que cette hypothèse, d'une densité uniforme, donne une température centrale maximum.

*La température centrale d'un astre condensé est donc, au maximum, égale au triple de la température superficielle du noyau.* C'est la valeur trouvée au chapitre précédent pour le cas général.

En admettant une dilatation probable du Soleil égale à 8 à partir de zéro degré (voir n° 9 ch. 3), on obtient ;

(11) $\qquad T_0 = 2{,}11 T_1, \qquad T_0 = 12.660^0$

La température centrale du Soleil ne peut guère dépasser le double de la température à la surface du noyau, exactement 2,11. En admettant 6.000° comme température superficielle on a un maximum de 13.000° au centre, dans l'hypothèse limite où la densité serait constante du centre à la surface.

Mais la température à la surface du noyau est plus grande qu'à la surface extérieure délimitée par la photosphère. En admettant l'équilibre adiabatique pour l'atmosphère, l'accroissement de température y serait de 1° pour 50 m. On verra dans l'étude des atmosphères que l'épaisseur de la photosphère doit être de 30 km. à 50 km. ce qui donnerait un accroissement de 1.000° pour 50 km. La température à la surface du noyau serait de 7.000° et la température centrale maximum de 15.000°. En admettant 8.000° à la surface du noyau on aurait un maximum de 17.000° au centre.

2° Pour *les astres très chauds*, voisins du maximum de températures $T_1$ et $T_0$ étant très grandes, alors 1 est négligeable devant les $\varepsilon T$, les $\varepsilon$ sont égaux à leur valeur limite, la formule (8) devient :

$$\frac{2u_1}{\alpha_1 u_1 + 2}\frac{T_0}{T_1} + (1 - u_1)\frac{T_0}{T_1} = 1$$

ou

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{\alpha_1 u_1 + 2}{\alpha_1 u_1 (1 - u_1) + 2} \tag{12}$$

On verra plus loin que la densité à la surface du noyau est encore ici, égale au tiers de la densité limite du gaz (au moins pour $\rho \geqq \frac{1}{2}\rho_0$ cas extrême qui forme la délimitation des groupes). On aura donc

$$\frac{T_0}{T_1} = 3\frac{3 + \alpha_1}{9 + \alpha_1}, \qquad u_1 = \frac{2}{3}, \tag{13}$$

formule simplifiée qui est applicable à tous les astres du premier et du second groupe, en admettant une dilatation constante et négligeant 1 devant $\varepsilon T$.

On verrait alors que pour les *astres très chauds*, $\alpha_1 \geqq 5$, la *température centrale n'atteint pas le double de la température à la surface du noyau*.

3° Enfin pour les *astres très dilatés* répondant au troisième cas où $\rho$ est négligeable devant $\rho_0$, on a $u_1 = 1$ et (6) devient

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{1}{2}\alpha_1, \qquad \frac{T_0}{T_1} = \frac{7}{4} = 1.75, \tag{14}$$

car on verra alors que la valeur limite de $\alpha_1$, en prenant pour $r_1$ la limite extrême de la nébuleuse, est égale à $\frac{3}{2}$.

Le rapport des deux températures resterait donc voisin de cette limite 1,75 pour tout le second et le troisième groupe d'astres où l'on aurait

$$D_1 < \frac{1}{2}\rho_0.$$

Il faut remarquer en outre que, dans ce dernier cas, le calcul s'étend à l'astre tout entier considéré dans son ensemble comme homogène, la pression superficielle nécessaire à l'équilibre étant négligeable.

*En résumé*, pour tous les astres condensés, ou normaux, caractérisés par l'existence d'un noyau nettement séparé de l'atmosphère, la température centrale ne peut pas dépasser le triple et probablement le double de la température à la surface du noyau. Ce groupe des astres condensés est caractérisé par ce fait que la densité moyenne est plus grande que la moitié de la densité limite du gaz. Ce groupe comprendrait les astres de masse beaucoup plus petite que Jupiter, comme aussi les astres de masse égale à celle du Soleil et de rayon 20 fois plus grand, ou de masse plus grande avec un rayon plus grand. Il comprend donc l'immense majorité des astres.

Pour les nébuleuses très diffuses ou très chaudes la température centrale maximum ne dépasserait pas le double de la température superficielle.

Ces conclusions supposent simplement que le covolume varie avec la température suivant une loi de dilatation quelconque.

4. **Variation de la température extérieure par rapport à la température moyenne superficielle.** — Nous n'avons considéré que les températures extrêmes à

la surface et au centre formule (8). La formule générale qui donne T en fonction de $r$ s'écrirait de même, $a$ est simplement multiplié par $1 - r^2$,

$$(15) \qquad \frac{2u_1}{au_1(1-r^2)+2}\frac{T}{T_1}+(1-u_1)\frac{1+\varepsilon T}{1+\varepsilon_1 T_1}=1.$$

Pour les astres condensés, comme le Soleil, l'accroissement de la température serait extrêmement rapide vers la surface, de 3200 degrés par km. La température cen-

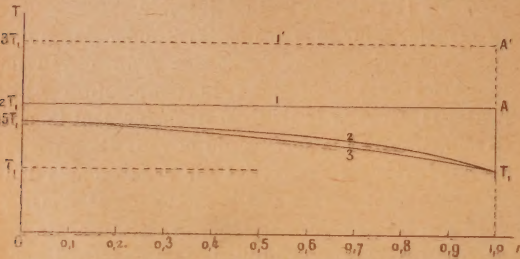


Fig. 12. — Courbe des températures intérieures d'un astre gazeux (densité uniforme). — 1 Courbe probable relative au Soleil. — 1' Courbe limite — 3. Courbe d'un astre très dilaté.

trale maximum y serait atteinte, à 0,01 près, à une profondeur de 500 kilomètres seulement. L'astre entier serait pratiquement à une densité uniforme, mais celle ci serait plus grande que celle de la surface du noyau, pratiquement le double, en tout cas inférieure au triple, comme on l'a vu.

La figure 12 représente la variation de ces températures intérieures dans les cas pratiques et les cas limites. La courbe 1 donne la variation probable relative au Soleil. La température augmente brusquement suivant la

courbe $T_1A$, qui est pratiquement rectiligne. Elle reste ensuite constante suivant la droite horizontale AB, après avoir atteint une valeur double de la température superficielle. La température maximum théorique serait donnée par $T_1A'B'$ avec température triple. Les courbes (2) et (3) de $T_1$ à 1,75 $T_1$ représentent la variation dans les cas limites où la densité est égale à la moitié de la densité limite du gaz et dans celui d'un astre très dilaté.

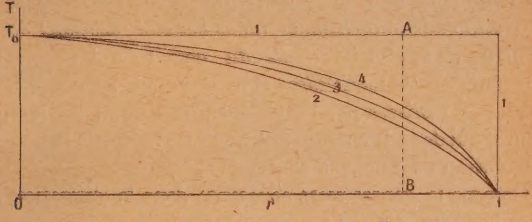


Fig. 13 — Courbes des températures intérieures d'un astre gazeux en fonction de la température centrale $T_0$. — 1. Courbe du Soleil et des astres condensés. — 2. Astres très dilatés, nébuleuses froides. — 3. Courbe de la température maximum. — 4. Cas $D = \frac{1}{2}\rho_0$.

On voit que la variation, depuis les astres très condensés, courbe 1, jusqu'aux astres très dilatés, courbe 3, ne donne pas des différences considérables.

La figure 13 représente les courbes de variation de la température intérieure rapportée à la température centrale, quand on fait descendre la température superficielle jusqu'à zéro pour réaliser strictement et mathématiquement la densité uniforme jusqu'à la surface.

Si on considère de plus la *température moyenne*, température uniforme qui donnerait la même quantité de chaleur, on voit que, pour les astres condensés, elle est

sensiblement égale à la température centrale, à $10^{-5}$ près pour le Soleil. Pour les autres elle reste supérieure au 2/5 de la température centrale, qui est sa limite pour les astres très dilatés.

5. **Maximum de la température centrale avec la variation du rayon et de la densité.** — A. VÉRONNET a démontré que si l'on considère un astre plus ou moins dilaté ou condensé, la température devait passer par un maximum sur toute couche, où sa *densité devenait égale au quart de la densité limite du gaz*, ce qui permet de déterminer cette température maximum et les conditions physiques réalisées par l'astre à ce maximum de température, qui devrait correspondre au maximum de la courbe d'évolution de LOCKYER et RUSSELL.

Comme la masse reste constante dans la dilatation ou dans la contraction, on a constamment

$$\rho r^3 = \rho_1 r_1^3, \tag{22}$$

$\rho$ étant la densité correspondant au rayon $r$ de l'astre. Nous avons ensuite pour la pression $p$ sur une couche quelconque où $x$ désigne la distance au centre par rapport à $r$ pris pour unité,

$$p = p_0(1 - x^2) = \frac{1}{2} f M \frac{\rho}{r}(1 - x^2) = p_1 \frac{r_1^4}{r^4}, \tag{23}$$

$p_1$ étant la pression sur la couche $x$ pour $r = r_1$. Si nous considérons les éléments d'une même couche la valeur de $x$ correspondante reste en effet constante dans la dilatation ou la contraction. La pression sur une couche quelconque varie donc en raison inverse de la quatrième puissance du rayon de l'astre. Cette loi sera conservée

pratiquement dans la variation d'un astre, où la densité reste sensiblement constante, ce qui est le cas général.

Considérons maintenant la formule des gaz réels, la signification des éléments étant la même que précédemment, $\rho_0$ désignant la densité limite du gaz à la température T,

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{RT}{\mu p}, \tag{24}$$

Prenons les différentielles des variables, on peut écrire

$$\frac{R}{\mu}\frac{dT}{p} + d\frac{1}{\rho_0} = d\frac{1}{\rho} - \frac{R}{\mu}Td\frac{1}{p}. \tag{25}$$

Or, d'après les valeurs de $\rho$ et de $p$ ci-dessus (22) et (23), on a [1]

$$d\frac{1}{\rho} = 3\frac{dr}{\rho r}, \qquad d\frac{1}{p} = 4\frac{dr}{pr} \tag{26}$$

D'autre part $\rho_0$ est fonction uniquement de T et varie toujours en sens inverse de T. Par conséquent $d\rho_0$ s'annule en même temps que $dT$ et est de signe contraire à $dT$. En désignant par F une fonction positive de $\rho_0$ et de T, ou peut écrire

$$d\frac{1}{\rho_0} = -\frac{d\rho_0}{\rho_0^2} = F dT$$

L'expression (25) devient alors

$$\left(\frac{R}{p\mu} + F\right)dT = \left(\frac{4}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)\frac{dr}{r}. \tag{27}$$

[1] On aurait encore la même expression différentielle de $p$ en admettant une *loi de densité quelconque* qui resterait la même dans la contraction ou la dilatation, (contraction homogène).

Cette formule détermine le sens de la variation de la température d'équilibre T de la couche $x$ par rapport à la variation $dr$ de $r$.

Si l'astre est très condensé, nous avons presque dans toute la masse $T = T_0$ et $\rho = \rho_0$. Alors $dT$ est du même signe que $dr$ pour presque toutes les couches. Leur température varie dans le même sens que le rayon extérieur. L'équilibre physique exige que l'astre se refroidisse en se contractant et réciproquement [1].

Si l'on suppose un astre plus dilaté, la température d'équilibre de la couche considérée augmente donc avec le rayon. Il arrive un moment où l'on a

$$\rho = \frac{1}{4}\rho_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dT}{dr} = 0 \tag{28}$$

La température de la couche considérée passe par un maximum à ce moment-là. Elle décroîtra ensuite continuellement pour un rayon plus grand, car $dT$ restera de signe contraire à $dr$.

Réciproquement, si l'on considère un astre homogène qui se contracte, ou un astre de densité quelconque qui se contracte d'une façon homogène, la température de chaque couche doit augmenter d'abord avec la densité jusqu'à ce que $\rho = \frac{1}{4}\rho_0$, puis diminuer ensuite. Comme $\rho$ est le même dans toute la masse, que $\rho_0$ varie en sens inverse de T et que la température centrale est la plus grande, ce sont

[1] On verra plus loin qu'il se refroidit également en rayonnant, ce qui dépend du signe de la capacité calorifique résultant du travail de contraction. Les astres dilatés pourraient se réchauffer en rayonnant.

les éléments du centre qui atteindront les premiers leur température maximum. Chaque couche passera ensuite par son maximum et cela progressivement du centre à la surface.

En portant alors l'expression de la pression centrale $p_0$ en fonction du rayon $r$ de l'astre, dans celle des gaz réels, on obtient l'expression de la température centrale maximum $T_0$ en fonction de $r$,

$$(29) \quad p_0 = \frac{1}{2}\gamma\rho r = \frac{1}{2} f \frac{M}{r}\rho, \qquad T = \frac{1}{2} f \frac{M\mu}{rR}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

En faisant dans cette formule $\rho = \frac{1}{4}\rho_0$ on obtiendra une première relation entre les valeurs de $r$ et T maximum que l'on peut écrire, en fonction du paramètre $\alpha$ de l'astre, en tenant compte de la conservation de la masse et de la loi de dilatation,

$$(30) \qquad \frac{rT}{r_1 T_1} = \frac{3}{8}\alpha_1, \qquad \text{et} \qquad \frac{r^4}{r_1^4} = \frac{\varepsilon\,\alpha_1}{\varepsilon_1\,2}.$$

En supposant le coefficient de dilatation $\varepsilon$ constant on trouvera alors que la température centrale maximum du Soleil serait 12.500 fois plus grande que sa température superficielle actuelle, soit 75 millions de degrés. Son rayon serait 25,5 fois plus grand que son rayon actuel et sa densité, donnée par (24) égale à $8{,}5 \times 10^{-5}$ par rapport à l'eau et 0,0657 par rapport à l'air, soit 15,2 fois plus petite que celle de l'air, égale à peu près à celle de l'hydrogène normal.

En tenant compte de la variation probable du coefficient de dilatation la température maximum serait ramenée à 57 millions de degrés et le rayon serait égal à 34 fois le rayon actuel.

La pression au centre dans le premier cas serait de 3160 atm. seulement et 1.000 dans le second cas.

**6. Variation générale de la température centrale et moyenne en fonction du rayon de l'astre. Courbes et maximum.** — On peut calculer de même la température centrale correspondant aux différentes valeurs du rayon $r$ de l'astre, et la densité correspondante. Le tableau suivant indique les principaux résultats pour une masse analogue au Soleil, calculés au moyen de la formule générale mise sous la forme

$$\frac{T_0}{T_1}\left(\frac{2}{\alpha_1}\frac{r}{r_1}+\frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\frac{r^3}{r^3}\right)=1 \qquad (31)$$

La première ligne donne les valeurs de $r$, la seconde ligne les valeurs de la densité $\rho$ correspondantes, où les trois premières valeurs sont exprimées par rapport à l'eau, les suivantes par rapport à l'air.

| $r : r_1$..... | 1 | 2 | 4 | 8 | 10 | 20 | 30 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$..... | 1.41 | 0.126 | 0.022 | 2.13 | 1.09 | 0.137 | 0.040 | 0.0087 |
| $T_0 : 10^6$... | 0.012 | 0.087 | 0.371 | 2.91 | 5-66 | 33.7 | 55.8 | 47.6 |

Ces calculs sont traduits dans les deux courbes 1 et 2 de la figure 14. Les valeurs du rayon, exprimées en rayons du Soleil, ont été mises en abscisses et les températures en millions de degrés en ordonnées. Les courbes se confondent à partir de $r = 100$, où d'ailleurs T devient inversement proportionnel à $r$, le terme en $r^3$ de la formule (31) devenant alors négligeable. A partir de ce moment-là, la masse gazeuse se comporte donc comme un gaz parfait. D'ailleurs la densité serait réduite

à $\frac{1}{1\,000}$ de la densité de l'air, la densité limite est négligeable. On a bien les *conditions d'un gaz parfait*.

Au contraire, pour les faibles rayons jusqu'à $r = 8$ ou 10, on remarque dans les calculs que le terme en $\alpha_1$ et $r$ de la formule (31) est négligeable, à cause de la valeur considérable de $\alpha_1$. La température T dépend alors

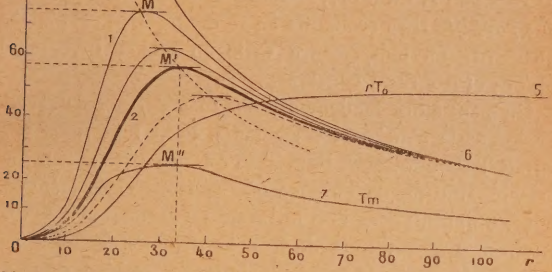


Fig. 14. — Courbes des températures d'un astre gazeux en fonction du rayon. — 1. Courbe de la température centrale dans le cas d'un coefficient de dilatation constant. — 2. Courbe avec la variation probable de ce coefficient. — 6. Courbe des gaz parfaits. — 7. Courbe de la température moyenne.

uniquement du terme en $r^3$ introduit par la formule de dilatation, c'est-à-dire que la masse gazeuse se dilate ou se contracte dans cet intervalle absolument *comme le ferait une masse liquide normale*. On remarque de même que $\varepsilon$ prend des valeurs croissantes avec T dans le premier intervalle, $r < 10$, et qu'il atteint alors sa valeur

limite, qui est celle de la dilatation des gaz, et qu'il la conserve, dans l'intervalle où sa valeur intervient.

On peut donc distinguer trois intervalles :

1° $r < 10 r_1$, la masse se comporte comme un *liquide*. La température est croissante avec $r$, elle décroît quand l'astre se contracte, le coefficient de dilatation est croissant avec la température : 2° $10 < r < 100$, c'est la zone de transition où se produit l'inversion et le maximum des températures, où la densité limite du gaz $\rho_0$ est sensible. La masse se comporte ici comme un *gaz réel* : 3° $r > 100\ r_1$ ou $50\ r_1$, la masse se comporte comme un *gaz parfait*. Il se réchauffe en se contractant et réciproquement. La température varie en raison inverse du rayon, et $r$ T reste constant.

On peut alors facilement, dans ce dernier intervalle, prolonger la courbe et les calculs. Pour $r = 5000\ r_1$ on aurait $T = 500.000°$. Pour $T = 5°$, qui est à peu près la température de l'espace où se trouve le système solaire, on aurait $r = 500$ millions de rayons solaires, ou environ 2,4 millions de fois la distance Terre-Soleil. On aurait une immense nébuleuse froide, dont on étudiera plus loin les conditions spéciales d'équilibre, avec celles des atmosphères, qui se trouvent dans des conditions analogues de raréfaction.

La température moyenne, représentée par la courbe 7, a un maximum de 26 millions de degrés pour un rayon égal à $28,6\ r_1$, rayon un peu plus petit que celui où a lieu le maximum de la température centrale.

Pour un rayon plus petit que $28,6\ r_1$, une masse analogue au Soleil se refroidit et se contracte en rayonnant, puisque la température moyenne d'équilibre diminue avec le rayon. De plus, la capacité calorifique est tou-

jours positive dans ce cas-là. L'astre se refroidit en rayonnant.

On peut calculer comme point de comparaison la courbe des températures centrales en fonction de $r$, dans le cas d'une densité uniforme, en admettant que le gaz suive la loi des gaz parfaits. On obtient l'hyperbole équilatère 6, sans maximum, commune aux autres courbes pour les grandes dilatations.

7. **Détermination du maximum de la température pour chaque couche. Courbes des températures intérieures.** — Nous avons vu que le maximum de la température avait lieu sur une couche quelconque quand la densité y était égale au quart de la densité limite du gaz à cette température. Or, quand un astre se contracte on voit facilement que la température maximum est réalisée au centre d'abord, puis progressivement du centre à la surface, à mesure que la contraction progresse.

En désignant par $x$ la distance d'une couche quelconque par rapport au rayon de l'astre, cette quantité $x$ reste constante pour une même couche, au cours de l'évolution dans l'hypothèse de la densité constante. On obtient les formules

$$r = \sqrt[4]{1 - x^2}\, r_m, \quad rT = (1 - x^2) r_m T_m, \quad \frac{T_0}{T} = \frac{4}{4 - 3x^2}$$

qui donnent la température maximum T de la couche $x$, le rayon $r$ et la température centrale $T_0$ de l'astre à ce moment là, en fonction de la température centrale maximum $T_m$ et du rayon correspondant $r_m$. La valeur

probable de la température centrale maximum pour le Soleil a été trouvée de 57 millions de degrés, avec un rayon égal à 34 fois le rayon actuel.

La couche située à une profondeur de 1/10 du rayon aurait passé par son maximum de température, égal à 16 millions de degrés, quand le rayon était égal à 22,5 fois le rayon actuel, la température centrale étant encore de 42 millions de degrés.

On voit ainsi que les trois quarts de la masse de l'astre n'auraient atteint leur maximum de température que pour une dilatation comprise entre 25 et 34 rayons solaires. La partie qui s'échauffe en se contractant ne constitue qu'une partie de plus en plus faible de l'astre correspondant à l'atmosphère. La température moyenne diminue, et la masse se refroidit dans son ensemble, à partir d'un rayon égal à 28,6 fois le rayon actuel.

Si nous considérons les couches superficielles, on trouve que la couche située à 7 km. de profondeur, à une pression actuelle de 28.000 atm. en admettant la densité uniforme, aurait passé par son maximum de température, soit 15.800 degrés, quand le rayon du Soleil était égal à 2,3 fois le rayon actuel. La température centrale aurait été alors de 63.000 degrés. La pression sur cette couche aurait été de 5.000 atmosphères.

Pour les autres couches plus superficielles la température maximum serait encore plus basse et l'on rejoindrait le rayon actuel. Mais alors nous quittons les couches correspondant au noyau homogène et les calculs ne s'y appliquent plus. Si nous admettons que la température de la couche de 7 km. se conservait sensiblement jusqu'à la surface on aurait 16.000 degrés environ

comme température extérieure maximum, ce qui correspond à peu près aux étoiles B.

Nous retrouvons donc ainsi le *cycle de Nordman Lockyer et Russell*. Les étoiles auraient été d'abord très chaudes et très dilatées, étoiles géantes, puis leur température externe aurait augmenté avec la contraction jusqu'à un maximum correspondant aux étoiles B ou A, pour diminuer ensuite indéfiniment. Mais nous verrons

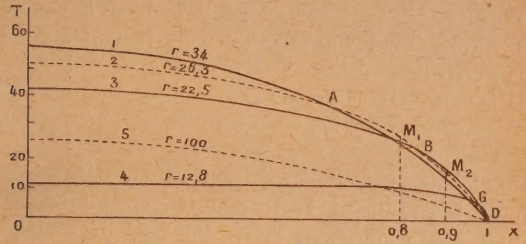


Fig. 15. — Courbes des températures intérieures d'un astre gazeux à différentes phases de la condensation. — 4. Courbe relative au Soleil dilaté de 12,8 fois son rayon. La température est presque uniforme. — 5. — Courbe pour une dilatation de 100 fois. — 1. Courbe du maximum de température. Les températures sont en millions de degrés.

que la température correspondant à la formation normale des astres est au-dessous de ce maximum, que les étoiles n'ont pas dû se former par contraction lente et équilibrée à partir d'un état diffus gazeux et que la constitution et l'équilibre des étoiles géantes doivent être différentes de celles des naines.

La figure 15 représente les courbes des températures intérieures pour différents rayons. La courbe 1 donne la température centrale. On voit que pour une dilatation de 10 rayons, courbe 4, la température est déjà sensible-

ment uniforme. C'est encore plus vrai pour tout rayon inférieur et ici nous avons une variation *maximum* des températures.

8. **Variation de la température en fonction de la masse de l'astre et du poids moléculaire du gaz.** — On a supposé jusqu'à présent que l'astre étudié était analogue au Soleil avec la même masse et les mêmes gaz ou vapeurs. On peut voir ce que deviennent la température centrale et le rayon correspondant pour des conditions différentes. L'allure des courbes donnée plus haut reste la même. Il suffira de déterminer les valeurs au maximum et la variation de la température pour quelques autres valeurs.

On obtient les formules suivantes pour déterminer le rayon $r$, la densité $\rho$ de l'astre pour la température maximum T, les valeurs $\rho_1$ $r_1$, $T_1$ $M_1$ étant relatives aux valeurs trouvées pour une étoile de masse égale à celle du Soleil,

$$(3a) \qquad \frac{r}{r_1} = \frac{\rho_1}{\rho} = \sqrt{\frac{M}{M_1}}, \qquad \frac{T}{T_1} = \frac{\mu}{\mu_1}\sqrt{\frac{M}{M_1}}$$

*Le rayon* d'un astre, au maximum de sa température centrale, *est proportionnel à la racine carrée de la masse*. Il est indépendant de la *masse moléculaire du gaz* qui constitue l'astre.

La *densité* au maximum de la température, est *inverse du rayon et de la racine carrée de la masse*. Elle est indépendante de la masse moléculaire du gaz, comme le rayon.

La *température centrale* maximum est *proportionnelle*

*à la masse moléculaire du gaz* $\mu$ et *à la racine carrée de la masse de l'astre M.*

Enfin, la pression centrale au maximum de température reste constante, indépendante de T, $r$, $\rho$, $\mu$, M, et égale à environ 1.000 atm.

Les valeurs de $r$, T et $\rho$ ont été calculées pour différentes valeurs de M. Elles sont consignées dans les tableaux suivants. La masse M est exprimée en fonction de celle du Soleil, $r$ en rayons solaires, T en millions de degrés, $\rho$ en millièmes de la densité de l'air.

Pour les masses plus grandes que celle du Soleil on a

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M..... | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 100 | 400 | 900 |
| $r$..... | 34 | 68 | 102 | 136 | 170 | 340 | 680 | 1020 |
| T..... | 57 | 114 | 171 | 228 | 285 | 570 | 1140 | 1710 |
| $\rho$..... | 27.8 | 13.9 | 9.27 | 6.95 | 5.56 | 2.78 | 1.39 | 0.93 |

Pour un astre d'une masse égale à 900 fois celle du Soleil le rayon atteindrait 1.000 fois celui du Soleil, environ trois la fois distance Soleil-Terre. La température maximum dépasserait un milliard de degrés et la densité ne serait que le millième de celle de l'air :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M : M_1$.. | 1 | 1/4 | 1/9 | 1/16 | 1/25 | 1/100 | 1/400 | 1/900 |
| $r : r_1$..... | 34 | 17 | 11.3 | 8.5 | 6,8 | 3.4 | 1.70 | 1,13 |
| $T : 10^6$.. | 57 | 28.5 | 19.0 | 14.2 | 11.4 | 5.7 | 2,85 | 1.9 |
| $\rho$..... | 0.028 | 0.055 | 0.083 | 0.111 | 0.139 | 0.278 | 0.556 | 0.834 |

On voit que pour une masse 900 fois plus petite que celle du Soleil, la température maximum d'équilibre serait, au centre, de deux millions de degrés et la densité presque égale à celle de l'air.

Dans tous les cas la température moyenne serait un peu moindre que la moitié de la température centrale, exactement 0,45 $T_0$ comme on l'a vu.

Si l'on considère des gaz de masse moléculaire différente, le rayon correspondant au maximum de température ne change pas, comme on l'a vu, la température seule varie.

On obtient le tableau suivant avec différentes valeurs de $\mu$. La première ligne indique les éléments chimiques correspondant à $\mu$. La température T est en millions de degrés.

| | $Ag^2$. | Ag. | Fe. | Al. | O. | Li. | He. | $H^2$. | H. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$..... | 220 | 110 | 55 | 27 | 16 | 7 | 4 | 2 | 1 |
| T : $10^6$.. | 57 | 28.5 | 14.2 | 7.1 | 4.15 | 1.81 | 1.04 | 0.51 | 0.26 |

La pression maximum au centre étant seulement de 1.000 atmosphères et la température étant de plusieurs millions de degrés, il y aurait certainement, au moins, dissociation moléculaire, réduisant toutes les molécules à être monoatomiques.

Si l'on suppose, ce qui paraît assez plausible, une ionisation qui ramène le poids moléculaire à 1, alors la température centrale maximum, compatible avec l'équilibre physique, s'abaisse à 260.0000 degrés seulement. S'il s'agit d'une masse 900 fois plus faible, comme celle de Jupiter, cette température devient encore 30 fois moindre et descend à 8.600 degrés. *On voit à quel point la dissociation pourrait limiter étroitement la température maximum interne des étoiles.*

La libération des électrons par ionisation pourrait l'abaisser encore de la même façon en ramenant le poids moléculaire au voisinage de 2, chaque atome pouvant libérer théoriquement un nombre d'électrons égal à la moitié environ de son poids atomique. La température maximum théorique n'atteindrait pas un million de degrés.

Inutile de faire remarquer d'ailleurs que ces millions de degrés sont purement théoriques. Nous verrons plus loin que la formation la plus rapide et la plus énergétique ne peut pas nous les fournir et que la température d'un astre n'a jamais pu atteindre son maximum théorique.

## CHAPITRE V

### ÉQUILIBRE PHYSIQUE ET EXTENSION DE L'ATMOSPHÈRE D'UN ASTRE. COMÈTES ÉTOILES GÉANTES

Nous avons étudié dans les chapitres précédents l'équilibre physique et la constitution, à l'intérieur d'un astre. Cette étude doit servir de base pour déterminer l'équilibre à la surface et dans l'atmosphère, la seule partie qui nous soit accessible.

Nous devons à Roche *l'étude mathématique* de la limite d'une atmosphère et son application à l'hypothèse de Laplace et aux comètes. A. Véronnet a déterminé la *limite physique* d'une atmosphère, où s'arrêtent les molécules et en a fait l'application aux planètes et aux étoiles. Enfin M. Milankowitch a repris et complété *l'étude thermodynamique* de cette atmosphère au point de vue des températures en hauteur, en latitude, suivant le cours des saisons et même des périodes géologiques.

1. **Surfaces de niveau autour d'un astre. Etude générale.** — Dans l'étude mathématique d'une atmosphère, Roche suppose que sa masse est négligeable par rapport à celle de l'astre qu'elle recouvre, lequel est de plus supposé sphérique. Il suppose en outre qu'elle prend instantanément la figure d'équilibre imposée par les conditions mécaniques, en négligeant toutes les conditions physiques d'entraînement et de viscosité. C'est donc la

figure d'équilibre *instantané*, à un instant donné, qui sera étudiée et définie.

Soit O le centre de l'astre considéré, S un astre perturbateur supposé à une distance très grande R, la direction OS étant prise pour axe des $x$, figure 16. Soit maintenant une particule P de l'atmosphère, située à une distance $r$ de O et R′ de S. Cette molécule est soumise à l'action de S suivant R′, de O suivant $r$, et à une rotation autour de l'axe Oy. L'astre O est soumis à l'action de S suivant R ou $x$. Il suffira d'appliquer à P

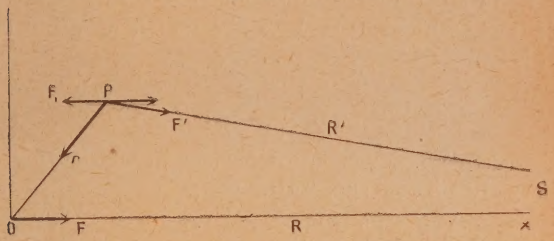


Fig. 16. — Actions sur une particule de l'atmosphère.

cette dernière action prise en sens contraire pour obtenir son mouvement, ou son *équilibre relatif*, par rapport à l'astre O, considéré comme fixe.

Les surfaces de niveau, ou surfaces équipotentielles, s'obtiennent simplement en égalant à une constante, la somme des potentiels correspondant à chacune de ces actions.

Soit $m$ la masse de l'astre O, le potentiel correspondant sera

$$(1)\quad V_1 = f\frac{m}{r} \qquad \text{ou} \qquad V_1 = \frac{1}{2}(Px^2 + Qy^2 + Rz^2)$$

Cette dernière expression dans le cas où l'on aurait affaire à un ellipsoïde homogène au lieu d'une atmosphère de masse négligeable, cas de l'étude des marées d'un corps fluide.

Le potentiel de rotation s'écrira, en appelant $\rho$ la distance de P à l'axe de rotation, $\theta$ l'angle de OP avec l'axe de rotation,

$$(2) \qquad V_2 = \frac{1}{2}\omega^2\rho^2 = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + z^2) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta$$

Enfin le potentiel perturbateur dû à l'action différentielle de l'astre S sur O et sur P sera, en désignant par M la masse de S,

$$(3) \qquad V_3 = f\frac{M}{R'} - f\frac{Mx}{R^2} = fM\left(\frac{1}{R} + \frac{3x^2 - r^2}{2R^3}\right)$$

La dernière expression est obtenue en développant la valeur R', où $x$ est supposé très petit,

$$(4) \qquad R'^2 = R^2 + r^2 - 2Rx,$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{x}{R^2} + \frac{3x^2 - r^2}{2R^3} \ldots.$$

Dans l'étude des comètes il faudra introduire dans la formule (3) une force répulsive agissant sur la particule sans agir sur l'astre O.

Dans l'étude des surfaces de niveau instantanées le terme $f\frac{M}{R}$ est constant et rentre dans la constante relative qui détermine chaque surface. *L'équation générale* des surfaces équipotentielles s'écrira donc

$$(5) \quad U = f\frac{M}{2R^3}(3x^2 - r^2) + f\frac{m}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta = C^{te}$$

avec

$$x = \rho \sin \psi = r \sin \theta \sin \psi \tag{6}$$

l'angle $\psi$ ayant son origine sur $Ox$. Cette valeur de $x$ permet de traduire le potentiel U en coordonnées polaires $r$, $\theta$, $\psi$.

La force qui sollicite chaque particule de l'atmosphère vers l'astre O dans la direction $r$, c'est-à-dire la *pesanteur*, sera donnée par l'expression

$$(8)\ F = \frac{dU}{dr} = f\frac{M}{R^3} r(3 \sin^2\theta \sin^2\psi - 1) - f\frac{m}{r^2} + \omega^2 r \sin^2\theta.$$

Roche appelle *surface limite* une surface, qui n'est pas de niveau, mais sur laquelle la pesanteur est nulle, c'est-à-dire déterminée par $F = o$. Les molécules seront en équilibre seulement sur les surfaces de niveau intérieures à la surface limite, pour lesquelles la pesanteur est dirigée vers O, c'est-à-dire celles où l'on a $F < o$. Au delà elles s'échapperaient. La *surface libre de l'atmosphère* sera déterminée par la surface de niveau qui touche la surface limite en un ou plusieurs points, par lesquels les molécules peuvent s'échapper.

2. **Cas particuliers. Atmosphères du Soleil, des planètes, des comètes. Calculs de Roche** — Considérons le cas d'un astre isolé, en rotation. C'est le cas de l'atmosphère du Soleil dans l'hypothèse de Laplace. Le terme $V_3$ du potentiel est supprimé. Les surfaces de niveau sont de révolution autour de l'axe de rotation $DD_1$ (figure 17). La surface libre, qui limite l'atmosphère, a la forme d'une lentille biconvexe, de section méridienne $BDB'D_1$, ayant une arête vive en $BB'$, dans le plan de l'équateur. Sur

cette arête la pesanteur égale l'attraction et les particules peuvent s'échapper librement, pour former des anneaux matériels dans le plan de l'équateur. Pour le Soleil le grand rayon OB égal 36 rayons solaires. L'atmosphère du Soleil, tournant avec lui, ne peut donc pas s'étendre à la moitié de la distance de Mercure, qui est à 83 rayons solaires. La lumière zodiacale n'en fait pas partie.

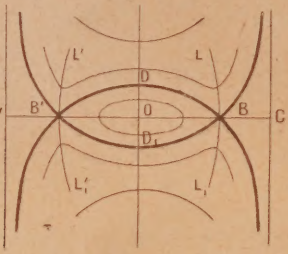


Fig. 17. — Surfaces de niveau et surface libre d'une atmosphère.

Si on considère un astre, comme une planète, ou une comète, soumise à l'action du Soleil, on trouve pour surface libre, une surface de révolution autour de la ligne des centres et terminée par deux points coniques sur cette ligne. La section méridienne serait analogue à celle de la figure précédente où les points coniques seraient en B et B' au lieu d'une arête vive circulaire. Les particules s'échapperaient par ces deux pointes. Elles décriraient des spires, s'il y a rotation[1].

[1] E. Roche. Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné. *Ac. de Montpellier* 1849-1850, 1851, — G. H. Darwin's, *Scientific Papers*. Vol 2. Tidal friction and cosmogony, 1908.

Dans le cas des planètes, avec rotation, l'effet d'allongement précédent est négligeable et on obtient sensiblement les mêmes surfaces du niveau que dans le premier cas. La formation des satellites par cette méthode s'obtiendrait comme celle des planètes.

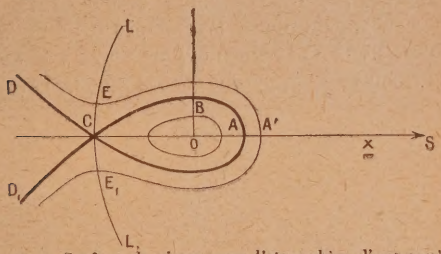


Fig. 18. — Surfaces de niveau pour l'atmosphère d'une comète.

E. Roche a étudié la figure d'équilibre dans le cas d'une force répulsive, cas des comètes. Il obtient comme surface libre la surface ovoïde ABC (figure 18) ayant un point conique en C, par où les particules peuvent s'échapper pour former la queue de la comète [1].

Les comètes posséderont donc deux surfaces libres, qui sont indiquées par la figure 19. La surface libre des molécules gazeuses, non soumise à la répulsion, qui est la surface à deux points coniques du second cas particulier A A', et la surface libre des particules soumises à la pression de radiation, surface à un seul point conique c' opposé au Soleil. Les rapports des dimensions de ces deux surfaces sont indépendantes de la distance de la comète au Soleil. Ils dépendent uniquement du rapport

[1] E. Roche *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. 5.

des masses de la comète et du Soleil. La figure 19 reste donc toujours semblable à elle-même, pour la même comète, ou plutôt pour les mêmes particules, car la surface libre des particules dépendra de leurs dimensions. Il suffit que la répulsion soit environ la moitié de l'attraction pour que le point C′ coïncide avec A′ et que les particules s'échappent dans les mêmes conditions que les molécules. Pour une répulsion plus grande, C′ est encore plus loin, elles s'échapperont encore plus facilement.

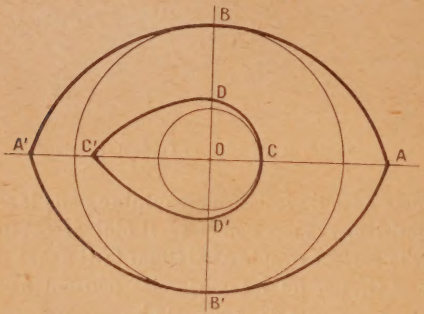


Fig. 19. — Les deux surfaces libres de l'atmosphère des comètes.

3. **Désagrégation des comètes. Calculs de Schiaparelli, Charlier, Luc Picart.** — Nous savons comment Roche avait déterminé la surface libre, où la pesanteur égale l'attraction, même sans force répulsive. Le rayon de cette surface dépend de la densité. On voit facilement qu'au-dessous d'une certaine densité, cette surface libre limite serait intérieure au noyau même de la comète. La comète se désagrégerait, comme l'a fait la comète de Biéla.

Ces calculs ont été repris par SCHIAPARELLI en admettant que le noyau de la comète reste sphérique et homogène [1] ou est constitué par un amas de particules météoriques. On retrouve les mêmes valeurs que celles données par les calculs de ROCHE.

M. CHARLIER a considéré le cas où l'essaim de particules, toujours supposé homogène et sphérique, décrit une orbite circulaire, et cela par une méthode plus précise et plus générale. Les densités critiques sont alors multipliées par 3/2 [2].

M. Luc PICART a simplifié la démonstration de CHARLIER et l'a appliquée au cas d'une particule extérieure à l'essaim, cas plus général et plus complexe [3].

4. **Formation de la queue et de la tête des comètes. Bessel, Brédichin.** — ROCHE avait considéré le *problème statique* de l'équilibre des particules et des molécules autour du centre de la comète. BESSEL a étudié *le problème dynamique* du mouvement des particules sous l'action de cette force répulsive qu'il avait devinée [4]. BRÉDICHIN a repris ces résultats et les a *traduits en chiffres* pour faire cadrer les observations avec la théorie [5].

La formule simplifiée de BESSEL donne pour la déviation relative $y$ par rapport au rayon vecteur, en fonction de $t$ et de $x$

$$y = \frac{f\mathrm{MG}}{3r_0^2}\varphi t^3. \qquad y^2 = \frac{8px^3}{9\varphi r_0^2}$$

[1] Entwurf einer astronomischen, *Theorie der Sternschnappen*. — V. TISSERAND, Mécanique céleste, t. 4, chap. 12.

[2] *Bul. de l'Acad. des Sc. de St-Pétersbourg*, t. 32, n° 3.

[3] *Annales de l'Obs. de Bordeaux*, t. 5.

[4] *Abhandlungen*, t. 1.

[5] *Annales de l'Obs. de Moscou*, Mémoires réunis en volume.

$r_0$ étant la distance du noyau au Soleil, et $\varphi$ le rapport de la répulsion à l'attraction. Pour une forte répulsion on voit que l'axe de la queue sera sensiblement rectiligne. La figure 20 donne la trajectoire relative des particules, donnant les différentes queues pour certaines valeurs de la répulsion.

Si on donne aux particules repoussées une certaine vitesse d'éloignement du noyau on arrive à rendre compte

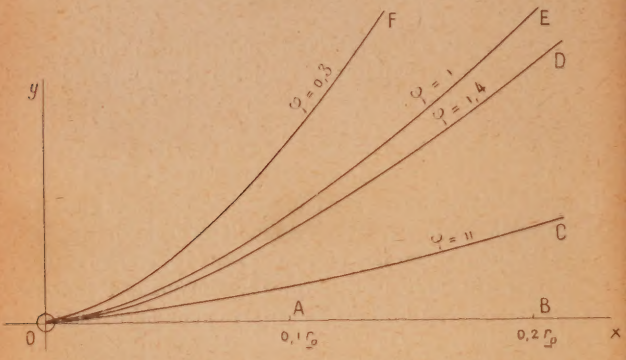


Fig. 20. — Courbes représentatives de la queue des comètes.

de la forme de la tête de la comète (figure 21). La force répulsive agit dans le sens AO$x$. Les particules s'échappent de O dans toutes les directions, avec des vitesses que l'on admet comme égales pour simplifier. Toutes ces particules décrivent donc des paraboles analogues à celle d'un projectile tiré dans toutes les directions. L'enveloppe de toutes ces particules sera un paraboloïde de révolution, ayant comme section droite ABC B′C′, c'est-à-dire la para-

bole de sûreté correspondante. On a bien la représentation des apparences présentées par la tête de la comète.

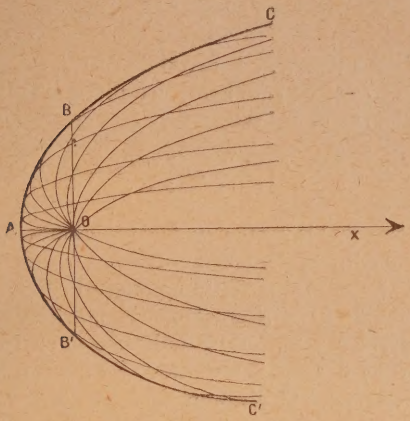


Fig. 21. — Trajectoires des particules et leur enveloppe formant la tête de la comète.

5. **Limite théorique d'une atmosphère déterminée par la vitesse des molécules et la température.** Une particule animée d'une vitesse $v$ située à la distance $r$ pourra échapper à l'attraction $\gamma$ d'un astre si on a

$$v^2 \geqslant 2\gamma r = 2f\frac{m}{r} \tag{42}$$

$m$ étant la masse de l'astre. D'autre part, la théorie cinétique donne pour la vitesse moyenne V des molécules à la température T la relation

$$\mu V^2 = 3RT. \tag{43}$$

Pour que les molécules ne s'échappent pas, il faut que l'on ait [1]

$$V < v \qquad \text{ou} \qquad r < \frac{2}{3} f m \frac{\mu}{RT} \tag{44}$$

En désignant par $r$, le rayon de l'astre, et $\gamma_1$ l'attraction à sa surface, on aura le rayon limite de l'atmosphère, exprimé en rayon de l'astre,

$$\frac{r}{r_1} = \frac{2}{3} f \frac{m}{r_1} \frac{\mu}{RT} = \frac{2}{3} \frac{\gamma_1 \mu r_1}{RT} = \frac{2}{3} \alpha \tag{45}$$

$\alpha$ est précisément le paramètre de condensation déterminé dans les chapitres précédents.

Pour l'atmosphère terrestre en prenant 16° centigrades ou 289° absolus à la surface, comme température moyenne, et supposant la température uniforme [2], on trouve une limite de 27,6 rayons terrestres. En prenant la température extrême de la haute atmosphère — 60° C on aurait 37,5. Pour les molécules ayant une vitesse double de la moyenne ces limites seraient réduites au quart, soit 6,9 et 9,4 rayons terrestres.

[1] Il faudrait prendre pour V la vitesse maximum des molécules à la température T pour avoir la limite extrême. On a ici une valeur moyenne. La vitesse maximum est probablement de l'ordre de 2 V. Il faudrait alors diviser $r$ par 4. On a seulement un ordre de grandeur approché. Aucune considération mécanique sur le choc ne permet d'admettre que certaines molécules puissent prendre des vitesses indéfiniment grandes. La répartition des vitesses autour de la moyenne, suivant la loi de MAXWELL, ne s'étend pratiquement qu'au voisinage de cette moyenne.

[2] La température moyenne d'une particule absorbante éloignée de la Terre, mais située encore à la même distance du Soleil, serait la même que la température moyenne de la Terre.

Si la Terre était à une autre distance du Soleil sa température varierait exactement en raison inverse de la racine carrée de la distance, d'après la loi de Stefan. A une distance 4 fois plus grande sa température moyenne serait moitié moindre, soit 145° absolus ou 128° au dessous de zéro. Les limites ci-dessus seraient doublées et portées à 13,8 et 18,8 rayons terrestres.

Nous avons supposé que la température de l'atmosphère était uniforme. Si nous supposons que cette température est entretenue uniquement par le rayonnement de la planète, équilibre radiatif, on voit facilement qu'à une certaine distance $r$ la température T sera donnée par la formule

$$\frac{T}{T_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_1}{r}} \qquad (46)$$

où $T_1$ est la température à la surface, rayon $r_1$. Cette valeur de T portée dans la formule (45) donne alors pour la limite théorique de l'atmosphère.

$$\sqrt{\frac{r}{r_1}} = \frac{2}{3} f \frac{m}{r_1} \frac{\mu}{RT_1} \qquad \frac{r}{r_1} = \left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2. \qquad (47)$$

On obtient exactement le carré des nombres précédents, soit 7620 rayons terrestres au lieu de 27,6. Ce serait plus de 100 fois la distance de la Lune. D'ailleurs à cette distance les molécules auraient plutôt la température due au rayonnement du Soleil, qu'au rayonnement de la de la Terre et la formule (46) ne s'y appliquerait plus. Il faudrait reprendre (45) et y introduire la température T correspondante.

Supposons au contraire que l'équilibre est adiabatique, c'est-à-dire entretenu par des courants de convection,

sans perte de chaleur par rayonnement ou conduction. On a dans ce cas la relation entre la pression et la densité

$$\frac{p}{\rho^{\varepsilon}} = \frac{p_1}{\rho_1{}^{\varepsilon}}, \qquad \varepsilon = \frac{C}{c} \tag{48}$$

$\varepsilon$ étant le rapport des chaleurs spécifiques. On a de plus pour la variation des pressions les formules,

$$\frac{dp}{p} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}}, \qquad dp = -\gamma\rho dr = -f\frac{m}{r^2}\rho dr. \tag{49}$$

En éliminant $dp$, la relation entre $d\mathrm{T}$ et $dr$ s'intègre immédiatement et donne pour la variation de la température T en fonction de la distance $r$ dans l'équilibre adiabatique

$$\frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}}{\mathrm{T}_1} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} f\frac{m}{r_1}\frac{\mu}{\mathrm{R}\mathrm{T}_1}\left(1 - \frac{r_1}{r}\right). \tag{50}$$

Cette valeur de T portée dans (45) donnerait $r$. Mais ici nous n'obtiendrons aucune limite car T varie trop vite et devient nulle avant que la limite donnée par (45) soit atteinte. On obtient donc la limite de l'atmosphère dans le cas de l'équilibre adiabatique en faisant $\mathrm{T} = 0$ dans (50). Pour la Terre on obtient $r = 1{,}20\,r_1$. La température tomberait à zéro pour une hauteur égale au cinquième du rayon, soit 1280 kilomètres, on voit que les courants de convection ne s'élèvent qu'à une dizaine de kilomètres, au delà c'est l'équilibre radiatif.

6. **La limite d'extension réelle d'une atmosphère. Application à la Terre et aux planètes.** — La formule des gaz réels permet de démontrer que, dans une masse gazeuse, il y a une séparation nette entre le noyau et

l'atmosphère, et de déterminer les conditions physiques précises sur cette surface, comme nous l'avons vu dans les numéros précédents. La théorie cinétique permet aussi de démontrer que la hauteur d'une atmosphère doit être limitée physiquement et de déterminer les conditions de cette limitation.

Nous connaîtrons ainsi les deux limites inférieures et supérieures d'une atmosphère d'un astre et leurs conditions physiques, ce qui permettra d'étudier d'une façon précise la variation de ces conditions physiques, entre les deux limites, à l'intérieur de l'atmosphère, et la variation de ces conditions physiques avec l'évolution de l'astre et la modification des conditions limites[1].

Le libre parcours moyen $l$ d'une molécule est très *voisin de* $10^{-5}$ cm. à zéro degré et sous pression normale $P_1$ pour la plupart des gaz. Il varie proportionnellement au volume $v$ pour les faibles pressions, et l'on a

$$\frac{l}{l_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{P_1 T}{p T_1}. \tag{51}$$

S'il y a un mélange on remplacera $p$ par la pression totale P. Si l'on s'élève dans l'atmosphère la pression diminue proportionnellement plus vite que la température et le libre parcours augmente. Il arrive un moment où ce libre parcours devient égal à la hauteur maximum $h$ à laquelle peut s'élever verticalement une molécule animée d'une vitesse V et soumise à la pesanteur $\gamma$. A ce niveau la limite de l'atmosphère peut-être considérée comme atteinte.

Les molécules qui se déplacent latéralement subis-

[1] *Comptes rendus* t. 167. p. 528 et 636 et 722 (1918).

sent encore le choc des particules voisines. Celles qui se déplacent radialement vers l'extérieur, ne rencontrent plus d'autres particules. Elles retombent sous l'action de la pesanteur en reprenant la même vitesse au même point. Cette vitesse V est supposée la même pour toutes les particules, latéralement et radialement. Pour que la pression soit la même dans les deux sens, il faut que le nombre des chocs des molécules sur une sur face soit le même dans le sens radial et dans le sens latéral. Il faut et il suffit alors que le temps du voyage aller retour d'une molécule, soit le même dans les deux sens. Soit $t$ le temps dans le sens latéral, $t'$ dans le sens radial, on aura

$$t = 2\frac{l}{V}, \qquad t' = 2\frac{V}{\gamma} = 4\frac{h}{V}. \tag{52}$$

D'où l'on tire

$$l = \frac{V^2}{\gamma}, \qquad l = 2h. \tag{53}$$

On a d'après la théorie des gaz $\mu V^2 = 3RT$, où $\mu$ est la masse moléculaire.

On en déduit pour le libre parcours et la pression limite $p$

$$l = \frac{V^2}{\gamma} = \frac{3RT}{\gamma\mu}, \qquad \frac{p}{P_1} = \frac{1}{3}\frac{l_1}{RT_1}\gamma\mu, \tag{54}$$

La loi de variation de pression des gaz sous la pesanteur $\gamma$ donne alors pour la hauteur $x$ de cette atmosphère, en y regardant T comme constant

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma\mu}{RT}dr = \frac{\gamma_1\mu r_1^2 dr}{RT\, r^2}, \tag{55}$$

$$x = r_1\left(1 - \frac{r_1}{r}\right) = \frac{RT}{\gamma\mu}L\frac{p_1}{p} \tag{56}$$

$r$ exprime la distance au centre quand, $x$ devenant considérable, il faut tenir compte de la variation de $\gamma$ ($r_1$ étant la distance de la surface au centre et $p_1$ la pression à la surface).

On obtient sur la Terre les pressions limites $2{,}88.10^{-13}$ atm. pour l'hydrogène ; $4{,}03.10^{-12}$ pour l'azote et $4{,}60.10^{-12}$ atm. pour l'oxygène. Ce serait moins que le millionième de la pression des tubes de Crookes. Notre atmosphère s'élèverait à 166 km., si elle était composée uniquement d'azote, à 145 km. si elle était composée d'oxygène, en prenant 213° A. ou — 60°C comme température moyenne de l'atmosphère.

Comme des étoiles filantes paraissent avoir été visibles à 400 kilomètres d'altitude, il faut admettre la présence d'un gaz plus léger. Une proportion de $40.10^{-12}$ d'hydrogène à la surface suffirait pour étendre sa limite à 380 kilomètres avec des molécules isolées rebondissant à 135 kilomètres plus haut, valeur du libre parcours $l$ à la pression limite. L'atmosphère s'étendrait ainsi à plus de 500 kilomètres. La proportion d'hydrogéne à la surface paraît être de l'ordre de $10^{-6}$ (Gauthier) ce gaz s'élèverait alors jusqu'à 1200 kilomètres.

Sur les autres planètes, en admettant que l'atmosphère est formée des mêmes éléments que sur la Terre, et que sa masse totale est proportionnelle à la masse de la planète, on trouve que la pression à la surface est proportionnelle au carré de la pesanteur et que la pression limite est inverse de la pesanteur à la surface,

$$(57) \qquad \frac{p_1}{P_1} = \frac{\gamma^2}{g^2}, \qquad \frac{p}{p_1} = 1/3 \frac{l_1}{RT_1} \frac{g}{\gamma} g\mu.$$

La hauteur de l'atmosphère sera donnée ensuite par la

formule (56). La température T est inverse de la racine carrée de la distance au Soleil en vertu de la loi de STEFAN.

Le tableau suivant donne la hauteur $x$ de l'atmosphère et la pression $p$ à la surface pour les principales planètes et la valeur minimum de la limite extrême de $r$ (du numéro précédent), dans le cas de l'hydrogène

| | Mercure | Vénus | Terre | Mars | Jupiter | Saturne | Uranus | Neptune |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$Km..... | 600 | 200 | 150 | 330 | 26 | 46 | 37 | 29 |
| $p_1 : P_1$..... | 0.17 | 0.77 | 1.00 | 0.14 | 6.4 | 1.12 | 0.85 | 0.9 |
| $r : r_1$..... | 4.4 | 34 | 47.1 | 11.6 | 3.000 | 1.500 | 760 | 1050 |

On voit que la pression superficielle $p_1$ *serait assez voisine de la nôtre* sur les autres planètes, sauf sur Mercure et Mars où elle serait environ 6 fois moindre et sur Jupiter où elle serait 6 fois plus grande.

Par contre, l'atmosphère s'élèverait un peu plus haut sur les autres petites planètes et serait beaucoup plus basse sur les grosses planètes à forte attraction. Elle serait limitée à 26 kilomètres seulement sur Jupiter, à moins qu'il n'y ait une forte proportion d'hydrogène, la dépression atmosphérique en altitude y serait extrêmement rapide. Un plateau de *quelques kilomètres de haut* s'élèverait dans une atmosphère assez raréfiée pour être visible de la Terre (tache rouge) alors que la surface, recouverte par *2,53 fois plus d'air* que sur la Terre, serait invisible.

La limite extrême de l'atmosphère, même supposée formée d'hydrogène, est très étendue pour toutes les planètes. Il faudrait que l'hydrogène sur la nôtre s'étende

à 47 fois le rayon actuel pour s'échapper. Sur Jupiter il pourrait s'élever à 3 000 fois son rayon.

Sur Mercure, au contraire, la limite moyenne ne dépasserait pas 4,4 fois son rayon. Comme la force vive de certaines molécules peut atteindre le double de la force vive moyenne et que la température initiale peut s'estimer au triple de la température actuelle, l'hydrogène non combiné a pu s'échapper. Peut-être n'y a-t-il pas eu alors formation d'eau.

Pour la Lune on trouverait une pression initiale à la surface de 0 atm. 028 seulement ou de 30 grammes par centimètre carré ; mais cette atmosphère se serait élevée jusqu'à une hauteur égale à trois fois le rayon de notre satellite. Cette faible atmosphère a dû être absorbée par le sol, comme l'eau de mer elle-même [1]. En tout cas la limite extrême qui est de 2,12 rayons pour l'hydrogène s'élève à 30 fois son rayon pour l'azote et l'attraction de notre satellite aurait toujours été suffisante pour retenir l'azote et l'oxygène, alors que l'hydrogène libre se serait échappé.

7. **Limite et composition de l'atmosphère terrestre. Aurores boréales, bolides, étoiles filantes, couche d'absorption dans la haute atmosphère.** — La pression et la densité dans une atmosphère de poids moléculaire $\mu$, à la température T, supposée constante, soumise à la

[1] D'ailleurs le calcul montre que la quantité d'eau primitive sur la Lune ne devait pas dépasser 2 à 300 m. et qu'elle a dû être absorbée complètement par le sol de notre satellite. A. VÉRONNET, Absorption de l'eau sur la Lune et les planètes (*C. R.*, t. 165 p. 262, 1917).

pesanteur $\gamma$, est donnée par la formule exponentielle où $x$ est la hauteur

$$(58) \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-ax}, \qquad a = \frac{\gamma\mu}{RT}, \qquad P = \Sigma p.$$

Si l'on a un mélange de plusieurs gaz la pression totale P est égale à la somme des pressions élémentaires de chacun d'eux, par suite proportionnelle à la somme des densités $\rho$ ou des $\mu p$. La formule s'applique donc intégralement à chacun des gaz du mélange. Si T est constant, on en déduit la loi exponentielle qui donne la pression en fonction de la hauteur

$$(59) \qquad P = \Sigma p = \Sigma p_1 e^{-ax}.$$

La pression limite déterminée dans le numéro précédent est applicable ainsi à un mélange. Chacun des gaz d'une atmosphère s'élèvera à peu près jusqu'au point où le libre parcours d'une molécule dans le milieu sera égal à la hauteur maximum à laquelle peuvent rebondir les molécules de ce gaz, à la température T, à la vitesse V, sous la pesanteur $\gamma$.

On a vu que la condition donnait $l = 2\,h$. Les molécules lancées vers l'extérieur ne rebondissent que jusqu'au milieu de la distance du libre parcours. Elles ne choquent donc pas les molécules supérieures. Elles retombent. Elles ne peuvent pas s'élever plus haut. Les molécules plus lourdes, ayant une moindre vitesse, leur limite est atteinte plus vite.

Le Dr Wegener, de Marbourg, avait calculé la proportion des gaz dans l'atmosphère, à différentes hauteurs, mais il avait admis une proportion d'hydrogène qui paraît beaucoup trop considérable. De plus, il ne connais-

sait pas l'existence d'une limite d'extension pour chaque gaz et ne s'en était pas occupé. Les calculs ont été repris à ce point de vue, et les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

| $x$Km... | 0 | 10 | 30 | 50 | 70 | 100 | 150 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Densités | | | $10^{-3}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-8}$ | $10^{-11}$ | |
| $\rho$.. | 1.000 | 0.201 | 8.37 | 35.82 | 15 59 | 14.49 | 6.87 4.39. $10^{-12}$ | |
| N.. | 0.755 | 0.160 | 7.21 | 32.5 | 14.64 | 14.02 | 6.04 2,6. $10^{-14}$ | |
| O.. | 0.232 | 0.039 | 1.14 | 3.3 | 0.95 | 0.47 | 0.067 9.5. $10^{-17}$ | |
| Ar. | 0.013 | $14.10^{-3}$ | $17.10^{-5}$ | $2.10^{-7}$ | $24.10^{-9}$ | $32.10^{-13}$ | $5.10^{-17}$ 76. $10^{-23}$ | |
| H $\times 10^{-12}$ | 40 | 35.8 | 28.7 | 23.0 | 18.4 | 13.2 | 7.6 4.36.$10^{-12}$ | |

Pourcentages

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N... | 0 755 | 0.797 | 0.861 | 0.908 | 0.939 | 0.968 | 0.879 | 0.006 |
| O... | 0.232 | 0.196 | 0.137 | 0.092 | 0.061 | 0.032 | 0.010 | $2.10^{-5}$ |
| Ar.. | 0.013 | 0.007 | 0.002 | $5.10^{-4}$ | $1.10^{-4}$ | $2.10^{-5}$ | $7.10^{-7}$ | $1.10^{-10}$ |
| H... | $4.10^{-11}$ | $2.10^{-10}$ | $4.10^{-9}$ | $1.10^{-7}$ | $1.10^{-6}$ | $1.10^{-4}$ | 0.111 | 0.994 |

Pour les principaux gaz de notre atmosphère, azote, oxygène, argon et hydrogène, leur densité relative est donnée par rapport à l'air et leur pourcentage à différentes hauteurs, jusqu'à 300 kilomètres, en admettant une température moyenne de — 60° C. ou 213° A., température de la haute atmosphère. On a admis une quantité infinitésimale d'hydrogène, de densité égale à $4.10^{-11}$ à la surface. A. Gautier en avait décelé des traces[1]. Les exposants de 10 dans la deuxième ligne du tableau indiquent, dans chaque colonne, le rang de la virgule pour les trois lignes qui suivent : densité totale $\rho$, azote N, oxygène O.

On remarque une décroissance très rapide de la den-

[1] Les analyses plus récentes accusent une proportion d'hydrogène de l'ordre des millionièmes. Ce gaz pourrait s'élever alors à 1.200 kilomètres. Sa pression indiquée dans le tableau, serait à multiplier par 10.

sité générale $\rho$, avec celle de l'azote et de l'oxygène, jusqu'à 150 kilomètres, chute d'un dixième environ par 13 kilomètres. A partir de 300 kilomètres, il n'y a plus que de l'hydrogène dont la pression décroît plus lentement et tombe à $48,10^{-14}$ à 400 kilomètres et $15,10^{-14}$ à 500 kilomètres, où arrivent les dernières molécules. La proportion d'oxygène tombe à 0,1 à 50 kilomètres et à 0,01 à 150 kilomètres. Celle d'argon diminue plus vite encore.

Le pourcentage de l'azote croît régulièrement jusqu'à plus de 100 kilomètres. Entre 100 kilomètres et 150 kilomètres, l'azote forme les 0,96 de l'atmosphère à une pres-

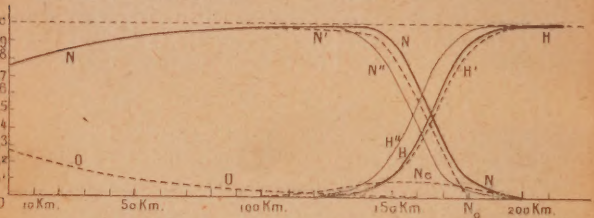


Fig 22. — Courbes de la proportion et de la hauteur limite des différents gaz dans notre atmosphère. N, O, H courbes de l'azote, de l'oxygène et de l'hydrogène. N' et H' correction des courbes en introduisant 0,0001 de Néon Ne. N'' et H'' décalage des courbes de l'azote et de l'hydrogène en triplant la proportion d'hydrogène.

sion inférieure à $10^{-5}$ atm. qui est celle des ampoules de Crookes. C'est la région des aurores boréales, caractérisées par la raie verte de l'azote (Végard) et que l'on a localisées à 150 kilomètres de hauteur.

La raie verte a été obtenue au laboratoire par fluorescence d'azote solide et serait caractéristique de cet

état. Toutefois la température dans la haute atmosphère ne peut pas descendre au-dessous de celle qui serait déterminée par le rayonnement de la surface terrestre, et qui est de l'ordre de 60 degrés au-dessous de zéro, celle de la haute atmosphère. Ce n'est pas la température de l'azote liquide. Mais, dans cette atmosphère très raréfiée de 150 kilomètres, l'ionisation peut grouper les molécules isolées, en gros ions, qui peuvent se comporter comme des particules solides.

Les pourcentages dans la région la plus intéressante, de 100 kilomètres à 200 kilomètres, sont détaillés dans le Tableau suivant et les courbes correspondantes sont données par la figure 22.

| $x$(Km) | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N.. | 0.974 | 0 977 | 0.976 | 0.958 | 0.879 | 0 650 | 0 308 | 0.096 | 0.024 |
| O.. | 0.026 | 0.021 | 0 017 | 0.013 | 0.010 | 0.006 | 0.002 | 0.0005 | 0.0001 |
| H.. | 0.0004 | 0.0016 | 0 007 | 0 029 | 0,111 | 0.344 | 0.690 | 0.904 | 0.976 |

La pression limite de l'azote et de l'oxygène $4,10^{-12}$ et $4,5.10^{-12}$, serait atteinte vers 160 kilomètres. En tenant compte des molécules à vitesse plus grande pouvant monter plus haut, la courbe de l'azote se limitera vers 180 kilomètres en $N_0$, figure 22.

L'hydrogène atteindrait sa densité limite $2,88.10^{-13}$ à 320 kilomètres de hauteur. Les molécules isolées s'élèveraient encore à une hauteur de 70 kilomètres, égale au libre parcours, ce qui porterait la limite extrême à 400 kilomètres. En multipliant la proportion d'hydrogène par 10 on augmente cette limite de 200 kilomètres : de 400 en la multipliant par $10^2$ et ainsi de suite.

On peut admettre que l'hydrogène primitif a disparu par combinaison avec l'oxygène resté en excès, et que le

faible résidu actuel, insuffisant pour agir sur le spectroscope, résulte du lent apport des étoiles filantes.

Une particule cosmique pénètre dans l'atmosphère avec une vitesse moyenne de 42 kilomètres, avec maximum de 72 kilomètres, qu'elle communique aux molécules qu'elle frappe. La température répondant à cette vitesse moléculaire est de 418.000° et le rayonnement instantané à cette température serait 30 milliards de fois plus grand qu'à 1.000°. La force vive d'une goutte d'hydrocarbure de 1 gr. seulement, diffusée par les chocs dans l'atmosphère d'hydrogène que l'on trouve à 400 kilomètres de hauteur, suffirait pour élever à une température de 1.000° et illuminer instantanément une traînée de 100 kilomètres de long sur 13 kilomètres de diamètre. Nous avons bien ici la réalisation des phénomènes extérieurs présentés par les étoiles filantes.

Un bolide laissera autour de lui également une traînée de molécules brillantes. De plus, sa surface s'élèvera à chaque instant à une température telle que la chaleur rayonnée d'après la loi de STEFAN soit égale à la chaleur engendrée par l'énergie cinétique apportée par les chocs. On a la formule ($\sigma = 5{,}32 \times 10^{-5}$ ergs)

$$\sigma T^4 = {}^1/_2 m v^2 = {}^1/_2 \rho v^3.$$

On obtient une température d'incandescence de 500°, quand la densité de l'atmosphère par rapport à l'air atteint $774{,}10^{-13}$ pour une vitesse de 72 kilomètres, ce qui se trouve à 150 kilomètres. On obtient 140 kilomètres pour une vitesse de 42 kilomètres. On a admis une transformation intégrale de l'énergie cinétique en chaleur rayonnée. Comme la densité est ici multipliée par 10 tous les 15 kilomètres environ, le point d'incan-

descence d'un bolide sera certainement compris entre 100 kilomètres et 150 kilomètres.

Le Dr Wegener avait admis une pression de 0,0033 d'hydrogène à la surface, qui est beaucoup trop grande. Ainsi l'hydrogène deviendrait dominant déjà à 80 kilomètres. Or il semble bien que les raies de l'aurore boréale sont dues à l'azote et localisées au delà de 100 kilomètres. De plus, la densité serait $10^7$ fois plus grande environ, que dans le tableau ci-dessus. La résistance offerte aux bolides et étoiles filantes serait 10 millions de fois plus grande. Ce serait trop. Sa limite d'extension serait 1.400 kilomètres plus loin, soit à 1.800 kilomètres. On a vu que cette pression limite suffirait pour l'incandescence des étoiles filantes. Elles apparaîtraient beaucoup trop loin, si l'hydrogène s'étendait à 1.800 kilomètres.

Remarquons encore que le fait de la limitation brusque d'un corps lourd comme l'azote dans un gaz plus léger comme l'hydrogène, produit également une chûte brusque de la densité à ce niveau, comme à la surface de deux liquides qui ne se mélangent pas. On aurait une *variation brusque de densité* vers 150 kilomètres à la limite d'extension de l'azote. Les molécules d'hydrocarbure apportées par les étoiles filantes vaporisées tomberaient donc dans l'atmosphère de l'hydrogène, jusqu'à ce niveau où elles seraient retenues plus longtemps et y formeraient une couche d'absorption. L'existence d'une telle couche a été reconnue par les observations faites au Mont Blanc par MM. Bauer et A. Danjon sur la transparence de l'air.

F. A. Lindeman et G. M. Dobson ont supposé que l'échauffement des particules météoriques, qui donnent les étoiles filantes, se fait par compression adiabatique de l'air

en avant de la particule, chaleur qui se communique ensuite à la particule [1]. Ils établissent ainsi les équations du phénomène qui relient la vitesse, la température, la masse, le rayon des particules. Ils les en déduisent d'après les observations (apparition entre 160 et 700 kilomètres, disparition entre 80 et 120 kilomètres ; vitesse de 1 à 160 kilomètres ?). Ils en déduisent également que la température de l'air à ces hauteurs de plus de 80 kilomètres serait égale à celle à la surface et que la densité de l'air y serait égale à 1.000 fois celle que donne le calcul (à 150 km.). On peut en conclure également bien que l'hypothèse d'une compression adiabatique n'est plus applicable à un milieu aussi raréfié, ou même n'a plus aucun sens, ce qui est probable.

8. **Constitution du noyau du Soleil dans le cas d'un mélange de gaz. Composition et extension de son atmosphère.** — Les démonstrations du chapitre second sur l'inflexion des densités, la séparation nette entre le noyau et l'atmosphère, la densité sensiblement uniforme du noyau, ont été faites dans le cas d'un seul gaz, avec le même poids moléculaire $\mu$. On peut voir facilement qu'elles s'appliquent intégralement à un mélange gazeux, si l'on néglige seulement en première approximation les faibles différences entre les coefficients de dilatation et de compressibilité.

On peut alors calculer, en effet, la composition de la masse en chaque point. Quand la pression atteint 1.500 atm. environ, les gaz atteignent en même temps le tiers de leur densité limite et la courbe des densités possède

[1] *Proc. Royal Soc.*, t. 102, p. 411 (1923).

là un point d'inflexion brusque qui délimite nettement le noyau et l'atmosphère.

Les calculs peuvent se faire complètement dans le cas où la température est uniforme. D'ailleurs la variation de température dans la faible couche où la densité varie rapidement modifierait à peine le résultat.

Pour le noyau on peut regarder toutes les molécules comme diatomiques à cause des fortes pressions. Le poids atomique moyen correspondant à 6.000° et à la densité 1,41 serait à peu près de 110, voisin de celui de l'argent, 108. Les calculs ont été faits en admettant, sur la couche, où la pression atteint 1.500 atm., une proportion de 0,4 d'argent [1], de 0,1 de fer (56), de 0,1 de calcium (40), de 0,1 de sodium (23), enfin de 0,3 de tantale (180), pour rétablir la moyenne 110. On obtient le Tableau suivant. La densité du Soleil est prise pour unité. Le premier chiffre à droite représente les millièmes.

| $x$(Km). | 0 | 1 | 2 | 5 | 10 | 20 | 30 | 50 | 100 | Centre |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ta..... | 0.100 | 173 | 220 | 265 | 283 | 291 | 294 | 297 | 300 | 0.3 |
| Ag .... | 0.133 | 200 | 248 | 322 | 361 | 382 | 387 | 390 | 396 | 0.4 |
| Fe..... | 0.033 | 42 | 50 | 67 | 82 | 91 | 94 | 97 | 99 | 0.1 |
| Ca..... | 0.033 | 40 | 46 | 61 | 75 | 86 | 91 | 95 | 97 | 0.1 |
| Na..... | 0.033 | 37 | 41 | 51 | 64 | 77 | 84 | 91 | 96 | 0.1 |
| D..... | 0.332 | 492 | 605 | 766 | 865 | 927 | 950 | 970 | 988 | 1.0 |

On voit que la densité a presque doublé sur 2 km. seulement, passant de 0,332 à 0,605. Elle atteint près de 0.99 à 100 km. de profondeur, ce qui correspondrait à 1 km. sur la Terre. La densité est uniforme et la composition homogène dans toute la masse, à quelques millièmes

[1] On pourrait remplacer l'argent par la même proportion de fer tétraatomique.

près, s'il n'intervient pas de phénomènes de condensation liquide.

Dans l'atmosphère, en considérant les gaz comme monoatomiques, à cause de la haute température et des faibles pressions, et en admettant sur la couche d'inflexion la même composition que précédemment avec en plus 0,001 d'hydrogène, on obtient le Tableau suivant de la variation de la densité des différents éléments avec la hauteur $x$ en kilomètres. Les densités ont été multipliées par 1.000, ce qui donne à peu près les densités par rapport à l'air (la densité du Soleil étant 1,4 et celle de l'air 0,0013). On a ajouté au bas la densité moyenne D en admettant seulement 0,0001 d'hydrogène.

| $x$(Km). | 0 | 2 | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ta..... | 100 | 29 | 2 | $10^{-2}$ | $10^{-6}$ | $10^{-10}$ | $10^{-14}$ | $10^{-19}$ | $10^{-40}$ |
| Ag..... | 133 | 67 | 17 | 0.9 | $10^{-3}$ | $10^{-5}$ | $10^{-8}$ | $10^{-10}$ | $10^{-24}$ |
| Fe..... | 33 | 25 | 14 | 2.7 | 0.2 | 0.01 | $5.10^{-4}$ | $3.10^{-5}$ | $6.10^{-12}$ |
| Ca..... | 33 | 27 | 18 | 8·1 | 1.1 | 0.12 | $14.10^{-3}$ | $16.10^{-4}$ | $3.10^{-8}$ |
| Na..... | 33 | 30 | 24 | 16.3 | 6.1 | 1.8 | 0.57 | 0.19 | $3·10^{-4}$ |
| H..... | 1 | 1 | 1 | 0.98 | 0.95 | 0 93 | 0.90 | 0.88 | 0.76 |
| D..... | 333 | 179 | 76 | 29.0 | 8.35 | 2.86 | 1.48 | 1.07 | 0.76 |
| H..... | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.10 | 0.10 | 0.09 | 0.09 | 0.09 | 0.08 |
| D..... | 332 | 178 | 75 | 28.9 | 7.5 | 2.0 | 0.67 | 0.28 | 0·08 |

On voit que la densité est tombée déjà à la moitié de sa valeur à 2 km. et à moins de 0,01 à 30 km. A l'inverse de ce qui se passe dans le noyau, la composition varie également vite. Les vapeurs de tantale et toutes les vapeurs plus lourdes (iridium, platine, or, mercure, plomb, bismuth, radium, uranium) ne comptent déjà plus dans la densité totale à partir de 20 km., celle de l'argent et métaux à poids atomiques voisins (molybdène, palladium, cadmium, étain, antimoine, tellure, baryum), vers 30 km.

On pourra donc négliger les vapeurs lourdes dans l'étude de la composition de l'atmosphère visible.

Comme l'absorption de l'atmosphère solaire est du même ordre que celle de l'atmosphère terrestre, on peut admettre qu'à la surface de la photosphère la densité de l'atmosphère solaire est voisine de la nôtre. La pression y est d'ailleurs du même ordre d'après les mesures spectroscopiques. D'après le Tableau, la hauteur de la photosphère au-dessus du noyau serait alors de 50 km. dans le premier cas, ou de 30 à 35 km. dans le second, avec 0,1 d'hydrogène [1].

Il semble que les nombres fournis dans ce dernier cas cadrent mieux avec la proportion probable de l'hydrogène et des vapeurs métalliques, fer, calcium, sodium, à la base de la couche renversante, colonne de 30 km.

En passant de 20 km. au-dessus de la couche d'inflexion, à 10 km. au-dessous, on voit que la densité passe de 0,0083 à 0,865, c'est-à-dire de celle des gaz à celle des liquides, avec accroissement de 110 fois sa valeur pour une profondeur de 30 km. seulement. Il y a donc une couche de niveau parfaitement définie et stable, qui délimite nettement le noyau, ce qui permet de concevoir l'atmosphère solaire à l'image de la nôtre, selon les idées de Faye.

Enfin on voit que l'atmosphère solaire est formée presque uniquement d'hydrogène, au moins à partir de 100 km., et quelle que soit la proportion des vapeurs

[1] Les nombres donnés pour la profondeur des taches sont beaucoup plus forts. Mais on se demande quelle valeur scientifique ils peuvent avoir, car les mesures sont faites sur les bords du Soleil, où la réfraction est énorme sans que nous puissions calculer, son ordre de grandeur, ni ses effets précis.

métalliques. Sa densité tombe d'ailleurs de 0,1 tous les 425 km. seulement. Elle atteint sa pression limite $8.10^{-12}$ atm. à 4.500 km., c'est-à-dire 6″,30 en lui attribuant une pression d'une atmosphère à la surface. Or, on a observé des vapeurs métalliques jusqu'à 8″ et 10″ de hauteur. Il faut qu'il s'y trouve un gaz plus léger. En admettant une proportion de coronium de $10^{-6}$ avec poids atomique 1/4, la limite de l'atmosphère solaire sera reportée à 10.000 km., soit 14″,16, et celle des vapeurs métalliques à 6.800 km., soit 9″,44. Avec poids atomique de 1/10 et une proportion de $10^{-8}$ on aurait 24″ et 12″. Le coronium peut être remplacé d'ailleurs par une faible proportion d'électrons libres, qui jouent le rôle de molécules et abaissent le poids moléculaire moyen.

Nous savons que les nuages descendent plus bas en hiver qu'en été, parce que les mouvements de convection sont plus faibles à température plus basse. Supposons que le Soleil se refroidisse un peu, sa zone de condensation descendra davantage, à 20 km. par exemple. Les vapeurs lourdes apparaîtront, d'après le Tableau ci-dessus, avec combinaisons possibles, et la couche traversée deviendra plus épaisse. Le Soleil prendra les apparences d'un Soleil couchant, c'est-à-dire d'une *étoile rouge*.

Remontons dans le passé, sur le Soleil plus chaud, la zône de condensation remontait plus haut, à 50 km. par exemple. Le Tableau indique à ce niveau les vapeurs métalliques plus rares et plus légères. Le Soleil présentait le spectre d'une étoile K. Si à une température plus haute encore la phostosphère remonte à une hauteur de 100 km. nous voyons par la dernière colonne du tableau que les raies de l'hydrogène apparaîtraient seules. Nous aurions une étoile blanche du type A.

La théorie de l'ionisation de M. Megh Ned Saha permet de préciser l'apparition des différentes raies spectrales en fonction de la pression et de la température et d'expliquer ainsi les apparences présentées par les différents types d'étoiles. Mais les formules qu'il donne exigent précisément que l'on connaisse la relation entre la pression et la température. Il faut donc déterminer l'équilibre et la composition de l'atmosphère à chaque hauteur, comme il a été fait ci-dessus, pour en déduire d'une façon précise la grandeur de l'ionisation. Les deux méthodes se complètent. L'ionisation explique pourquoi les raies de l'hélium apparaissent seules dans les étoiles les plus chaudes, les étoiles B.

L'ionisation interviendra plus spécialement dans la photosphère des étoiles géantes, surtout si celle-ci est formée d'une enveloppe de particules éloignée de l'étoile centrale. La théorie expliquera facilement les différences spectrales avec les étoiles naines de la même classe et pourra donner une base scientifique à la méthode empirique d'Adams. Les calculs de M. Saha montrent que l'ionisation seule pourrait faire disparaître les raies des métaux, sans qu'ils soient absents [1].

De ce que les raies de l'hydrogène apparaissent seules dans les étoiles A, on ne peut pas en conclure qu'elles sont uniquement formées d'hydrogène, ni que les corps plus lourds apparaissent seulement dans les étoiles moins chaudes et ne se forment que plus tard à la suite du refroidissement. Même en admettant que la phostosphère et

[1] Philosophical magazine (6) vol. 40 p. 472 809 (1920) et vol. 41 p. 267 (1912). Voir le très intéressant exposé de toute la théorie et résultats dans *l'Evolution des étoiles* de M. J. Bosler, ch. 2.

le spectre continu soient dus aux gaz sous pression et non à des particules solides, ou des gouttelettes liquides, il suffirait d'admettre une proportion plus grande de gaz légers, dans le cas des étoiles plus chaudes qui sont aussi de masse plus grande. Dans la formation des étoiles, les gaz légers ont pu rester complètement à la surface alors que les matériaux lourds allaient s'incorporer au noyau. Dans ce cas, en admettant que toutes les étoiles soient formées des mêmes éléments, dans les mêmes proportions, une masse 8 fois plus grande contiendrait 8 fois plus d'hydrogène. Mais la surface de l'astre serait seulement 4 fois plus grande et la quantité d'hydrogène par $cm^2$ y serait double. Son absorption pourrait donc devenir prédominante et donner ainsi les apparences d'une étoile A.

9. **Cas des étoiles plus chaudes. Température critique d'une étoile. Etoiles géantes.** — On a vu dans le chapitre précédent comment on peut déterminer, dans le passé, le rayon et les autres éléments d'après la température. On avait

$$(61) \qquad \frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{r_1 T_1}{r T} = \frac{r_1^4}{r^4}$$

La pression à la surface du noyau resterait la même. On retrouverait la même pression à une distance définie par

$$(62) \qquad \alpha \frac{x}{r} = C^{te} \qquad \frac{x}{x_1} = \frac{r}{r_1}\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{T}{T_1}\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{r^5}{r_1^5}$$

La hauteur de la pression limite serait définie de même à un logarithme près qui ne modifierait pas beau-

coup la valeur. On retrouverait donc la même proportion des mêmes éléments dans les mêmes colonnes du Tableau, mais la hauteur où se trouverait chaque colonne serait multipliée par $r^5$.

La chute de température dans l'équilibre adiabatique et la hauteur limite $x$ à laquelle les courants de convection pourraient s'élever seraient

$$(63) \qquad \frac{dT}{dr} = -\frac{\gamma}{GE} \qquad \text{et} \qquad \frac{x'}{x'_1} = \frac{T}{T_1}\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{r^5}{r_1^5}$$

On retrouve le même rapport que ci-dessus et il semble que la photosphère s'élève de la même quantité que les couches elles-mêmes. Ceci nous montre que la température de la photosphère ne peut pas croître dans le même rapport que celle du noyau.

En effet, la perte par rayonnement, proportionnelle à $T^4$ par $cm^2$, serait proportionnelle à $r^{12}$, puisque T est inverse de la densité et proportionnelle à $r^3$. Les courants de convection, qui transportent la chaleur interne à la surface, devraient augmenter d'intensité proportionnellement à $r^{12}$, c'est-à-dire 2.816 fois pour un rayon double. La température de rayonnement, correspondant à $x$, ne croîtra donc pas dans le même rapport que celle du noyau, correspondant à $x'$ et l'on aura $x' > x$.

La photosphère s'élèvera donc dans l'atmosphère, avec la température, dans la même proportion. L'étude de l'équilibre convectif dans l'atmosphère permettra de préciser ces conditions et de relier la température au spectre de l'étoile.

Les formules sur l'extension d'une atmosphère permettent de déterminer les conditions où elle s'étendrait à l'infini et s'échapperait.

La pression limite $p$ est déterminée par la formule suivante, où $r$ est le rayon limite de l'atmosphère, $P_1$ la pression d'une atmosphère,

$$\frac{p}{P_1} = \frac{1}{3}\frac{\gamma\mu l_1}{RT} = \frac{1}{3}f\frac{M\mu l_1}{RTr^2} \tag{64}$$

La distance $r$ où l'on trouve cette pression $p$, en tenant compte de la variation de l'attraction $\gamma$, la température T étant regardée comme uniforme, température moyenne, est donnée par

$$1 - \frac{r_1}{r} = \frac{RT}{\gamma\mu r_1}\operatorname{Log}\frac{p_1}{p} = \frac{r_1 TR}{fM\mu}\operatorname{Log}\frac{p_1}{p}. \tag{65}$$

$p_1$ est la pression sur la couche d'inflexion, à la surface du noyau. Elle est de 1.500 atm. et reste sensiblement constante à la température des étoiles. Le rayon du noyau est $r_1$.

Pour que l'extension soit limitée, $r$ fini, il faut la condition,

$$\frac{r_1 RT}{fM\mu}\operatorname{Log}\frac{p_1}{p} \leqq 1, \tag{66}$$

Or la variation du Log est négligeable en première approximation. Sa valeur est croissante avec $r$ et T. On aura encore en désignant par $p_1$ la pression limite actuelle de l'atmosphère de l'astre, et en remplaçant $p$ par $p_1$ dans (66)

$$\frac{r_1 RT}{fM\mu}\operatorname{Log}\frac{p_1}{p_1} < 1, \tag{67}$$

Or T est proportionnel à $r^3$. En désignant par $r'_1$ le rayon primitif à la température $T_1$, on a

$$\frac{r_1^4}{r_1'^3}\frac{r'_1 RT_1}{fM\mu}\operatorname{Log}\frac{p_1}{p_1} < 1, \qquad \frac{T}{T_1} = \frac{r_1^3}{r_1'^3}, \tag{68}$$

Ces deux formules donnent la température T et le rayon limite $r_1$ du noyau quand l'atmosphère s'étend indéfiniment. On a vu qu'on avait $p_1 = 1.500$ atm. et $p_1 = 2{,}88 \times 10^{-18}$ atm. pour l'hydrogène biatomique sur la Terre.

Pour le Soleil cette valeur est à multiplier par $\gamma\mu$ ou 14 en y prenant l'hydrogène monoatomique. Le logarithme de la formule ci-dessus est alors égal à 34. On a vu que pour le Soleil et $\mu = 1$ on avait $\alpha_1 = 3850$.

On a donc

$$\frac{r_1^4}{r_1'^4} < \frac{3850}{34}, \qquad r_1 = 3{,}27 r_1', \qquad T = 34{,}8 T_1.$$

Ainsi l'atmosphère du Soleil tendrait à s'étendre indéfiniment pour un rayon 3 fois plus grand que le rayon actuel et une température 35 fois plus grande, soit 210.000 degrés.

Ce sont des valeurs maximum. D'ailleurs l'extension de l'atmosphère pourrait être limitée par une enveloppe de particules solides repoussées par la pression de radiation, comme nous le verrons à propos des *étoiles géantes*.

Pour un astre, ou un ensemble d'astres maintenus à cette température, l'atmosphère s'étendrait de plus en plus, les gaz du noyau passeraient alors progressivement dans l'atmosphère. La matière entière des astres se volatiliserait de nouveau pour reconstituer une nébuleuse. Nous avons là quelque chose d'analogue à la température critique des gaz et vapeurs.

Les étoiles, au-dessus de cette température, se comporteraient comme des gouttelettes liquides qui se vaporisent. Au-dessous de cette température seulement elles

pourraient se condenser progressivement et reformer des noyaux de plus en plus gros.

La pression d'inflexion se comporterait également comme une pression critique, ce serait la pression limite de liquéfaction, qui croîtrait avec la température et se stabiliserait vers 1.500 atmosphères. En supposant nos gouttelettes stellaires assez rapprochées pour que leurs atmosphères se mélangent et que l'on diminue la pression ambiante, la matière des noyaux passerait également dans l'atmosphère et ils se volatiliseraient progressivement.

On pourrait se représenter le passage de la phase gazeuse à la phase liquide dans les vapeurs sur ce modèle. Les gouttelettes liquides seraient simplement des noyaux de condensation de molécules gazeuses, analogues aux noyaux des étoiles, mais la gravitation newtonienne est trop faible, pour opérer cette condensation. Il faut une force qui soit beaucoup plus grande aux faibles distances. Ce sont les forces électriques des constituants des atomes et molécules.

10. **Extension de l'atmosphère des comètes suivant la distance au Soleil.** — Les planètes restent sensiblement à la même distance du Soleil. La pression limite de leur atmosphère et son extension, déterminées par les formules (56) et (57) demeurent à peu près invariables. Il n'en est pas de même pour les comètes. Il faut tenir compte ici de la variation de la température avec la distance au Soleil.

Un corps exposé au rayonnement du Soleil pourra prendre une température comprise entre deux limites. S'il ne tourne pas, la face constamment exposée au Soleil

prendra une température maximum. S'il tourne, l'ensemble prendra une température moyenne qui sera un minimum. Dans les deux cas ces températures varieront en raison inverse de la racine carrée de la distance au Soleil d'après les lois de STEFAN et de KÉPLER,

$$\frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r}} \tag{69}$$

Si $r_1$ est la distance de la terre prise comme unité, on a T = 410° A ou 137° C pour le maximum et 230° A ou 17° C comme température moyenne minimum. A une distance 4 fois plus grande on aura 205 et 145 A. A une distance 9 fois plus grande les températures sont 3 fois plus basses, soit 132 à 97 degrés ou — 136 et — 176 centigrades.

On voit d'après les formules (57) et (56) que la pression limite de l'atmosphère va augmenter avec la distance et sa hauteur diminuer. L'atmosphère, en somme, se condense à la surface du noyau à cause du refroidissement, et la tête de la comète disparaît, quand elle s'éloigne.

Quand la comète se rapproche du Soleil la température augmente. Or, la température critique des hydrocarbures est très basse, de l'ordre de 40° A. Ils vont donc se vaporiser quand la comète est encore très loin du Soleil. La chaleur de vaporisation diminue d'ailleurs la température. Le diamètre sera déterminé par la formule (56) et va augmenter à mesure que la comète se rapproche.

A partir d'une certaine distance et d'une certaine température l'évaporation se transforme en véritable ébullition. A cause de la faible pression du milieu les molécules jaillissent normalement à la surface, dans la direction du Soleil, avec la vitesse des molécules déterminée

par la théorie cinétique. Ce sont les jets que l'on voit s'élever du noyau.

Tant que les molécules restent gazeuses, elles ne sont pas soumises à la répulsion. Mais comme les comètes probablement ne tournent pas, la température à la surface est voisine de la température maximum. Les molécules, au contraire, sont animées de mouvements de rotation et leur température se rapproche du minimum. Leur température diminue également avec leur éloignement de la surface. Elles se condensent en fines gouttelettes soumises à la répulsion.

On a vu que la surface libre de Roche se contracte quand la comète approche du Soleil. La surface physique d'extension se dilate au contraire. Quand elle dépasse la surface de Roche, la répulsion commence à agir sur les gouttelettes condensées. La tête de la comète se limite en avant comme dans la figure 21 et les particules rejetées en arrière forment à ce moment la queue. Elle ne fera qu'augmenter jusqu'au périhélie. Après, les mêmes phénomènes se reproduiront en sens inverse.

On voit qu'il faut deux conditions pour la formation de la queue. Ebullition assez rapide pour qu'il y ait condensation, et température assez élevée pour que la limite physique de l'atmosphère dépasse la surface de Roche. Ces deux conditions se réalisent en approchant du Soleil. D'ailleurs comme la masse est faible la température critique du numéro précédent peut se trouver réalisée et les molécules libérées peuvent former de vastes nébulosités diffuses autour du noyau de la comète.

11. **Variations de la température dans l'atmosphère terrestre** — Cette température varie en latitude

et en altitude. Elle varie avec l'heure du jour et les jours de l'année. Elle a encore des variations séculaires qui suivent celles des éléments astronomiques comme l'excentricité, le périhélie, l'obliquité de l'équateur sur l'écliptique.

La loi de STEFAN permet de déterminer facilement la température moyenne théorique à la surface de la Terre, à l'équateur et sur un parallèle quelconque, en fonction de la température et de la distance du Soleil, en admettant une absorption complète de la chaleur reçue.

Soit $T_1$ la température du Soleil, R son rayon, $q_1$ la quantité de chaleur reçue normalement par l'unité de surface et par seconde à la distance $r$. Soit une zone d'épaisseur $e$ à la latitude $\alpha$ sur un astre de rayon $r_1$ situé à la distance $r$. On aura pour la chaleur reçue par seconde $q$ sur cette zone en négligeant l'action de l'atmosphère et de l'obliquité de l'écliptique, qui donne les saisons,

$$q = q_1 S' = \sigma \frac{R^2}{r^2} T_1^4 \cdot 2\pi r_1 \cos^2\alpha \qquad (70)$$

S' étant la projection de la surface de la zone, ou cette surface vue du Soleil.

La chaleur rayonnée par cette surface à la température T sera,

$$q' = \sigma T^4 S = 2\pi r_1 e \sigma T^4 \cos\alpha. \qquad (71)$$

L'équilibre de température a lieu quand la chaleur rayonnée $q'$ est égale à la chaleur reçue. On en tire

$$\frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{R}{r}} \sqrt[4]{\frac{\cos\alpha}{\pi}} \quad \text{et} \quad \frac{T_m}{T_1} = \sqrt{\frac{R}{2r}} \qquad (72)$$

$T_m$ est la température moyenne générale. A la distance de la Terre on a $r = 215$ R. En faisant $T = 6000$ on

trouve pour la température moyenne 17° centigrades. La température admise est 16°. A l'équateur $\cos \lambda = 1$ on trouve 34 degrés centigrades. C'est précisément la température équatoriale à l'intérieur des continents. Il y a abaissement de température par évaporation à la surface des mers, où on a 26 degrés. A la latitude de 45° la formule (72) donne 10° comme température. La température moyenne observée est de 11 degrés. La formule (72) donnerait des résultats un peu trop faibles vers le pôle où T tend vers zéro avec $\cos \lambda$, alors que l'insolation estivale et les courants aériens y maintiennent une température supérieure.

Ces résultats précis montrent que la température terrestre est sensiblement la même que si l'atmosphère n'existait pas et si le sol se comportait comme un corps noir. L'action de l'atmosphère compense assez exactement les pertes d'absorption, c'est-à-dire que l'atmosphère rayonne vers le sol précisément la quantité de chaleur qui ne l'atteint pas directement.

La température actuelle peut donc se calculer exactetement en fonction de celle du Soleil. Il en sera de même pour le passé et pour l'avenir dans l'hypothèse où la composition de l'atmosphère n'aura pas changé sensiblement.

On en déduira avec la même précision la température qu'aurait la Terre, en la supposant à la distance d'une autre planète, de Mars par exemple $r = 1{,}52$. La température moyenne à l'équateur y serait de 23 degrés *au-dessous de zéro*. A une température maximum de 70 degrés sur notre équateur correspondrait une température de + 5 degrés à la distance de Mars. Ce serait la température de Mars en y supposant l'absorption complète.

Elle serait plutôt un peu inférieure, excepté cependant si le coefficient d'émission y est plus faible.

La température dans l'atmosphère est déterminée par le rayonnement du sol et par les courants verticaux de convection. On peut séparer ces deux actions.

Si le rayonnement du sol existait seul la température au voisinage serait

$$T = \frac{T_1}{\sqrt[4]{2}} \tag{73}$$

$T_1$ étant la température du sol, il y aurait une chute brusque de température, qui rend nécessaires les courants de convection et leur donne naissance.

A une assez grande distance, ou en admettant que la basse atmosphère ne laisse passer sensiblement que le rayonnement radial, on a

$$\frac{T'}{T_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{r_1}{r}} \tag{74}$$

La variation de température avec la hauteur serait

$$\frac{dT}{T_1} = -\frac{1}{2}\frac{dr}{r}. \tag{75}$$

C'est-à-dire, seulement de 0,02 degré par kilomètre. La température resterait sensiblement constante avec la hauteur. Ceci se vérifie vers 10 kilomètres. Au delà se maintiendra l'équilibre radiatif, qui est sensiblement isothermique. Il n'y aura pas de courants de convection.

La température donnée dans cette hypothèse par les formules (73) et (74) est reproduite dans le tableau sui-

vant pour différentes valeurs de $T_1$ température à la surface

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | + 34° | + 26 | + 16 | + 11 | 0 |
| T | — 25 | — 27 | — 30 | — 34 | — 43 |
| T' | — 56 | — 60 | — 68 | — 72 | — 80 |

La première ligne donne les températures à la surface à l'équateur, continents et mers, la température moyenne, la température moyenne à Paris. La seconde ligne donne les températures calculées par la formule (73), la troisième celles de la formule (74). Les températures observées dans la haute atmosphère, couche isothermique, sont beaucoup plus voisines de cette seconde ligne que de la première, en moyenne — 60 degrés. Tout se passe donc pour la haute atmosphère comme si la basse atmosphère absorbait tout le rayonnement latéral du sol pour ne laisser passer que le rayonnement normal.

On peut d'ailleurs déduire les nombres de la dernière ligne, conformes aux observations, du fait, vérifié ci-dessus, que la basse atmosphère absorbe complètement le rayonnement du sol, surtout par la vapeur d'eau et le gaz carbonique dont la hauteur est limitée. Désignons par $T_1'$ la température moyenne effective de cette basse atmosphère, température telle que son rayonnement total est égal au rayonnement du sol, cette température $T_1'$ est donnée par la formule (73) et par ligne T du tableau.

La température de la haute atmosphère sera déterminée par le rayonnement de la basse atmosphère, température $T_1'$ et la formule (73). On aura alors

$$T = \frac{T_1'}{\sqrt[4]{2}} = \frac{T_1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{T_1}{\sqrt{2}}, \tag{76}$$

La température de la haute atmosphère, au-dessus de la couche absorbante sera bien donnée par la formule (74) et la dernière ligne du tableau.

Si au contraire il n'y avait pas de rayonnement, ou pas d'absorption, la température serait déterminée uniquement par les courants de convection, et les formules de l'équilibre adiabatique, perte de température par la détente,

$$(77) \qquad \frac{dT}{dr} = -\frac{g\mu}{R}\frac{C - c}{C} = -\frac{981 \times 28{,}82}{8{,}32 \times 10^7}\frac{2}{7}.$$

Pour les molécules biatomiques on a $\frac{C}{c} = \frac{7}{5}$. La chute de température par kilomètre serait de 9,6 degrés. On observe une chute de 5 degrés par kilomètre pour les 3 ou 4 premiers kilomètres et de 7 à 8 degrés pour les autres. Les courants de convection s'élèveront jusqu'à ce que la température soit tombée de celle du sol à celle de l'équilibre radiatif. Ce sont les courants qui établissent le passage entre ces deux températures.

On voit donc que la couche absorbante d'air, de vapeur d'eau et de gaz carbonique, qui forme serre chaude, diminue de moitié la vitesse de chute de la température entre elle et le sol. Au-dessus elle ne la diminue que de un ou deux degrés par kilomètre, 7 à 8 degrés au lieu de 9,6. Jusqu'à 10 ou 11 kilomètres l'équilibre est plutôt adiabatique. Au delà il devient radiatif, c'est-à-dire sensiblement isothermique.

On trouvera l'étude plus complète et plus compliquée des différents phénomènes dans l'important travail de N. M. Milankovitch *Théorie mathématique des phénomènes thermiques par la radiation sotaire*, 1920, Gauthier Villars.

## CHAPITRE VI

### ENTRETIEN DE LA CHALEUR SOLAIRE. AGE DU SOLEIL ET DE LA TERRE

1. **Le problème de l'entretien de la chaleur solaire.** —Ce problème, comme tous ceux d'astronomie physique, comme beaucoup d'autres de physique terrestre, ne s'était pas posé aux Anciens. Le Soleil était fait pour nous éclairer et nous réchauffer, comme l'oiseau pour voler.

Ce problème ne s'est posé qu'au milieu du XIX^e^ siècle, quand on a commencé à savoir que la chaleur était de l'énergie, ou du travail, et quelle énorme quantité d'énergie le Soleil rayonnait tout autour de lui.

C'est POUILLET qui a mesuré un des premiers la quantité de chaleur reçue à la surface de la Terre. Elle est environ de 2 calories par minute et par centimètre carré[1], c'est la constante solaire. Cela donne une énergie d'un cheval-vapeur par mètre carré. La surface de quelques départements français reçoit autant de chaleur que pourrait en fournir le charbon extrait dans le monde entier.

Nous savons d'ailleurs que toute l'énergie utilisable sur la Terre nous vient du Soleil. C'est la chlorophylle qui l'utilise le mieux en fabricant le bois, le charbon, et les réserves nutritives que s'assimilent les animaux. Le cycle

[1] Les déterminations varient de 1, 2, à 3. La valeur la plus probable serait 1,93 C. G. ABBOT. *An. Astroph. Obs. Smiths Inst* t. 3. 1913, p. 200. Cette constante solaire est d'ailleurs variable.

de la vapeur d'eau, qui s'élève des océans pour former ensuite les rivières et les fleuves et nous fournir l'énergie mécanique ou électrique de la houille blanche, en est la manifestation la plus frappante.

Mais la chaleur reçue par la Terre n'est qu'une partie infime de l'énergie rayonnée par le Soleil. Celle-ci se chiffre par le nombre $4.\ 10^{33}$ calories par an.

De plus, ce rayonnement prodigieux n'a pas varié sensiblement depuis la période historique, car un changement de quelques degrés seulement dans la température moyenne de nos contrées aurait modifié considérablement les régions de culture de la vigne, de l'olivier, de l'oranger, par exemple. De plus, la géologie nous apprend que le Spitzberg, dans les régions polaires, jouissait autrefois d'une végétation tropicale, ce qui nous indique que la température terrestre, et par conséquent le rayonnement solaire, étaient encore plus considérables qu'actuellement.

Or, les géologues attribuent aux périodes géologiques des millions et même des centaines de millions d'années. Quel est le mécanisme qui a pu fournir au Soleil, pendant des périodes aussi longues, une quantité de chaleur aussi énorme ? Quel est le régulateur qui a pu maintenir un rayonnement sensiblement constant pendant de longues périodes, avec une décroissance très lente depuis l'origine ?

Les théories très nombreuses, qui ont été mises en avant, peuvent se rattacher à quatre sources d'énergie principales : les théories physiques et l'énergie de refroidissement, les théories chimiques et l'énergie moléculaire, les théories physicochimiques et l'énergie intra-atomique, enfin les théories astronomiques et l'énergie de gravitation.

Les théories les plus modernes se rattachent naturellement aux énergies intraatomiques, au radium et à la relativité. Elles nous introduisent dans un monde nouveau, un peu féerique, auquel on a voulu parfois faire jouer le rôle des bonnes fées d'autrefois. En ne retenant que les théories basées sur des faits constatés, et non sur des hypothèses gratuites, brillantes mais incertaines, il semble que l'énergie de gravitation est encore la seule qui soit à même de nous donner la solution du problème.

2. **Les théories physiques et l'énergie du refroidissement.** — On a pu penser tout d'abord que la masse énorme du Soleil pouvait expliquer la lenteur de son refroidissement.

Cette masse est de $2.10^{33}$ grammes. Le Soleil perd environ $4.20^{33}$ calories par an. Si rien ne régénérait sa chaleur, chaque gramme du Soleil perdrait donc 2 calories par an. En donnant à la masse solaire la plus grande capacité calorifique que l'on connaisse, celle de l'eau, égale à 1, il se refroidirait de 2 degrés par an. Encore faudrait-il que toute la masse participe au refroidissement, autrement ce refroidissement serait encore plus rapide à la surface. La température superficielle étant de 6.000 degrés environ, le refroidissement serait total en 3.000 ans.

De plus, la température à la surface de la Terre est exactement proportionnelle à celle du Soleil. Prenons 20° centigrades, ou 293 degrés absolus, comme température moyenne de la Terre, elle tomberait à zéro degré, et serait gelée, au bout de 200 ans seulement, quand la température du Soleil aurait baissé de 400 degrés.

Il faudrait admettre une température moyenne interne de 2 millions de degrés, pour que le refroidissement du Soleil dure un million d'années. Cette température n'a plus de sens physique [1]. De plus, le refroidissement de la Terre n'aurait demandé que 66.000 ans.

On a essayé de corriger ces calculs en admettant que la *chaleur spécifique* pouvait être très considérable, à l'intérieur du Soleil, en raison des pressions énormes.

Le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail donne, dans le cas d'une variation $\partial v$ de volume,

$$\delta Q = \delta U + p\delta v$$

où $p$ est la pression, $\partial U$ la variation d'énergie interne de la masse considérée et $\partial Q$ la quantité de chaleur fournie. En divisant cette dernière quantité par la variation de température $\partial T$, on obtient, l'expression de la chaleur spécifique

$$\frac{\delta Q}{\delta T} = \frac{\delta U}{\delta T} + p\frac{dv}{dT}.$$

Le terme relatif à U reste fini. Le dernier terme, dans le cas des gaz parfaits, est égal à

$$\frac{pv}{273} = \frac{RT}{273}, \qquad \text{car} \qquad \frac{1}{v}\frac{dv}{dT} = \frac{1}{273}$$

[1] Arrhénius, par exemple, calcule que le gradient de température à la surface du Soleil, en admettant la loi des gaz parfaits et l'équilibre adiabatique, est de 9 degrés par kilomètre pour une atmosphère d'hydrogène monoatomique. En admettant les mêmes conditions jusqu'au centre il trouve 6 millions de degrés. Poincaré dit à ce propos : « Il est inutile d'insister sur tout ce que des évaluations de ce genre présentent d'arbitraire et d'incertain ». (Hypothèses cosmogoniques p. 208).

est le coefficient de dilatation à pression constante. La chaleur spécifique ne dépend plus ainsi de la pression, mais seulement de la température T.

Dans le cas des gaz réels [1], on montre que cette chaleur spécifique change de signe, en passant par l'infini, pour les couches où la densité est égale au quart de la densité limite du gaz. Ce passage a lieu très rapidement et donne lieu seulement à un maximum de température.

D'ailleurs on sait par la loi fondamentale de Dulong et Petit que la chaleur spécifique atomique est une constante [2]. La chaleur spécifique ne peut varier que dans la proportion des poids atomiques eux-mêmes. Elle ne peut donner que des nombres inférieurs à celui donné plus haut, ou du même ordre.

Il faut faire remarquer enfin que la chaleur spécifique calculée ci-dessus est une chaleur spécifique mathématique, où l'on englobe l'énergie résultant du travail de la pression ou de la contraction et ceci rentre dans l'hypothèse d'Helmholtz étudiée plus loin.

[1] Sur la contraction d'une masse gazeuse et l'évolution du Soleil. A Véronnet (*Comptes rendus*, t. 166, p. 286, 1918). Voir chapitre précédent.

[2] Elle augmente avec la température pour les solides et liquides, mais elle tend sans doute vers une limite. M. Belot, en lui donnant une valeur égale à 310 pour une température de 1 million de degrés, peut ainsi emmagasiner dans le Soleil une réserve d'énergie de 210 millions d'années de chaleur. Mais le million de de degrés est très hypothétique et l'extrapolation considérable (Sur l'origine de la chaleur solaire et stellaire. *C. R.* t. 170, p. 1563, 1920). Il obtient encore 370 millions d'années de chaleur, d'après les vitesses trouvées dans les étoiles nouvelles. Mais ces vitesses sont celles des gaz de l'atmosphère, plutôt que celles des masses.

Le refroidissement amène la *liquéfaction des gaz* et cette liquéfaction dégage de la chaleur. Mais cette quantité de chaleur ne correspond jamais qu'à un refroidissement de quelques centaines de degrés et le refroidissement total serait à peine retardé de quelques centaines d'années.

3. **Les théories chimiques et l'énergie moléculaire.** — On a pu croire autrefois que le Soleil brûlait comme un immense bloc de charbon, mais aucune combustion, même des plus énergiques et des plus rapides, comme celle de l'hydrogène et des explosifs, ne donne une température supérieure à 3.000 degrés, et celle du Soleil atteint 6.000 degrés.

De plus, aucune rèaction chimique ne dégage plus de 5.000 calories par gramme. Le carbone dégage bien 8.000 calories par gramme, mais il faut tenir compte de la masse de l'oxygène nécessaire. Le maximum est obtenu par la combustion du lithium avec 4.700 calories. La masse entière du Soleil ne pourrait fournir que $5000 \times 2 \times 10^{33}$ calories, c'est-à-dire ce qu'il rayonnerait en 2.500 ans seulement. Cet appoint serait insignifiant.

M. Briner a pu augmenter ce nombre considérablement [1] en considérant la chaleur dégagée par les *réactions chimiques à partir des atomes*, au lieu de la calculer à partir des molécules, comme on l'avait fait précédemment. La transformation d'un gramme d'hydrogène monoatomique, en molécules biatomiques, dégage 45.000

[1] Le problème chimique du rayonnement solaire. *Rev. gén. Sc.* 1916.

calories. C'est près de 10 fois le nombre précédent. Cela ne donne encore que 25.000 années de chaleur.

Arrhénius a cru trouver une nouvelle source d'énergie en admettant dans le Soleil l'existence ou la formation de *composés endothermiques*, qui dégageraient ensuite et progressivement toute leur énergie de formation. Or, M. Briner a montré que tous les composés endothermiques sont exothermiques, si on considère la formation à partir des atomes, et non à partir des molécules. Leur décomposition se traduit donc finalement par une absorption et non un dégagement d'énergie.

De plus, la formation de ces composés, à l'intérieur du Soleil, ne pourrait se faire qu'aux dépens d'une autre énergie. C'est cette autre énergie qui nous intéresse et dont il faudrait indiquer la source. Les composés endothermiques d'Arrhénius ne sont qu'un « rouage intermédiaire », qui pourrait transformer, mais non fournir de l'énergie.

Les composés les plus endothermiques sont les explosifs. Ils fournissent des gaz à des températures voisines de 3.000 degrés sous des pressions de plusieurs milliers d'atmosphères, d'où une capacité de travail et d'énergie énorme. Or, si le Soleil était tout entier formé d'un seul bloc de mélinite, qui ferait tout d'un coup explosion, que se passerait-il ? Presque rien. La masse prendrait une température voisine de 3.000 degrés, moitié moindre que celle du Soleil. La densité limite du gaz produit serait voisine de celle de la mélinite solide. Le volume serait peu modifié. Il se formerait seulement une atmosphère, moins étendue que celle du Soleil, dont la gerbe explosive n'atteindrait pas l'ampleur de la moindre protubérance.

L'ingénieur Siemens a présenté en 1882 l'hypothèse de la *récupération* de la chaleur solaire par un milieu gazeux très raréfié [1]. Par malheur, ce milieu très hypothétique n'absorberait pas le dixième de l'énergie solaire, jusqu'à la Terre, car les températures du Soleil, déterminées par la loi de Wien ou par celle de Stefan, sont très voisines, ce qui exclut une absorption plus considérable. On verra la critique de toute cette ancienne théorie au chapitre 3 des Théories modernes du Soleil de M. J. Bosler.

4. **Les théories physico-chimiques et l'énergie atomique.** — Les théories précédentes nous fournissaient un nombre d'années de chaleur ridiculement insuffisant. On obtenait au maximum 25.000 ans. Les géologues parlaient de millions. Les théories nouvelles ne jonglent plus avec les millions, mais avec les milliards, et même les centaines de milliards. On croit voir apparaître des visions de contes de fées. Il faudra ici préciser avec soin le point où finissent les faits constatés, où commencent les hypothèses.

Dès la découverte des faits de *radioactivité* on a invoqué la chaleur dégagée par le radium, et les corps analogues, pour expliquer la chaleur solaire. La quantité d'énergie fournie est beaucoup plus considérable que celle des réactions chimiques. Elle se chiffre en milliards de calories par gramme, au lieu de quelques dizaines de mille. Par contre, la vitesse des réactions chimiques était extrêmement rapide. Ici la vitesse de dégagement

[1] *Proceedings Roy. Soc. of London*, t. 33, p. 389 (1882). — *Nature*, t. 25, p. 440.

de l'énergie est extrêmement lent. Elle exige des milliers d'années au lieu de demander seulement des millièmes de seconde. La puissance énergétique, ou la capacité de travail par gramme et *par seconde*, est de ce fait extrêmement réduite et *les deux phénomènes ne paraissent pas donner, dans l'ensemble, des résultats très différents*, bien que la modalité ne soit plus du tout la même.

Le radium dégage 132 calories par gramme et par heure, soit 1, 2. $10^6$ calories par an. Il faudrait, pour expliquer le rayonnement du Soleil, y supposer la présence de 3, 3. $10^{27}$ gr. de radium, soit 1,6 gramme par tonne. Cette proportion dépasse celle des minerais les plus riches que l'on connaisse. Ces minerais sont extrêmement rares. Ce serait une hypothèse invraisemblable d'admettre que le Soleil entier en soit formé, hypothèse aussi gratuite que de dire qu'il serait tout en or.

De plus l'activité du radium décroit avec le temps. Elle se réduit de moitié au bout de 1.700 ans environ. Ce radium doit donc se renouveler très vite. On sait qu'il provient de la transformation de l'uranium. Dans cette transformation la proportion du radium et de l'uranium reste constante et est de 3 tonnes d'uranium pour 1 gramme de radium. Il faudrait donc, pour fournir le radium nécessaire, une masse d'uranium égale à $10^{34}$ grammes, c'est-à-dire une masse 5 fois plus grande que celle du Soleil. En faisant intervenir tous les produits de désintégration de l'uranium jusqu'au plomb, il faudrait encore admettre que la masse presque entière du Soleil est en uranium. Cette hypothèse est également invraisemblable.

De plus, les transformations radioactives se font avec dégagement de particules $\alpha$, qui sont des atomes d'hé-

lium. Un gramme de radium fournit par an 156 $mm^3$ d'hélium, soit 2,8. $10^{-5}$ gr. en même temps que les $1{,}2.10^6$ calories. La production d'un gramme d'hélium correspond donc à un dégagement de $1.\ 2.\ 10^6 : 2,\ 8.\ 10^5 = 4,\ 3.\ 10^{10}$ calories. Or on a pu déterminer la pression à la surface du Soleil. Au niveau de la couche renversante cette pression est de l'ordre de quelques atmosphères [1]. En supposant cette pression de 10 atmosphères et l'atmosphère solaire formée uniquement d'hélium, sa masse ne représenterait que 170 années de chaleur [2]. De plus la proportion d'hélium dans l'atmosphère du Soleil est assez faible, car il ne donne pas de raies noires dans le spectre, de sorte que son absorption est insensible. Même en admettant sa présence dans toute la masse solaire, cette faible proportion indique le faible rôle joué par les phénomènes radioactifs. D'ailleurs il n'y a pas de raison pour que les corps radioactifs et l'hélium soient en plus grande proportion sur le Soleil que sur la Terre. Or ici cette proportion est infime.

J. H. Jeans et Eddington ont repris récemment cette hypothèse en indiquant que les fortes pressions qui règnent à l'intérieur du Soleil (elles atteignent un milliard d'atmosphères au centre), y transforment les atomes légers en atomes lourds et radioactifs.

C'est là une hypothèse toute gratuite, qui n'est basée sur aucun fait positif. Nous ne connaissons pas plus le

[1] Buisson et Fabry donnent 4 à 6 atm. (*Comptes rendus* 15 mars 1909), Jewell, Humphreys et Mohler de 2 à 7 *Astron. Journal* t. 3 p. 139.) Evershed 0,13 atm. seulement (*Kodaikaval. Obs.* n° 18 1910).

[2] *Comptes rendus*, t. 158, p. 1650, 1914.

mode de formation des atomes lourds que celui des atomes légers. La radioactivité n'est pas influencée par la pression. Il serait étrange qu'elle soit engendrée par elle.

De plus l'objection de la proportion d'hélium subsiste toujours. Il en faudrait dans le Soleil une masse de $10^{30}$ grammes pour donner 10 millions d'années de chaleur. Cela représenterait les 2 millièmes de la masse et cette proportion serait beaucoup trop forte, et absolument inadmissible.

5. **Transformation de la masse en énergie. Hypothèse de M. J. Perrin.** — M. J. Perrin vient de lancer une hypothèse plus neuve, plus hardie encore [1]. Basée sur la formation de tous les atomes à partir de l'hydrogène, et sur la transformation de la masse en énergie, d'après la théorie de la relativité, elle peut fournir au Soleil 80 milliards d'années de chaleur.

Il semble bien acquis actuellement que tous les noyaux des atomes sont formés de noyaux d'hydrogène et d'électrons. L'atome d'oxygène serait formé de 16 atomes d'hydrogène, celui de carbone de 12, etc. En prenant l'atome d'hydrogène pour unité, le poids atomique de l'oxygène devrait être exactement 16, celui du carbone 12. Or, ils sont un peu inférieurs. Il y a une perte de 7,7 mg. par gramme.

M. J. Perrin émet alors l'hypothèse que cette masse perdue s'est enfuie avec l'énergie rayonnée, au moment

[1] *Annales de Physique*, 1919. *Revue du mois*, 1920, — note à la seconde édition des Atomes. — Origine de la chaleur solaire, *L'Astronomie*, 1922, p. 49.

où les atomes se sont formés, à partir de l'hydrogène. D'après la théorie d'Einstein l'énergie rayonnée possède une masse, elle est pesante. Cette masse exprimée en grammes est telle que son produit par le carré de la vitesse de la lumière en cm : sec. donne l'énergie en ergs. La perte de 7,7 mg. par gramme correspondrait donc à un dégagement de $0{,}0077 . 9.10^{20}$ ou $6{,}93.10^{18}$ ergs, c'est-à-dire 166 milliards de calories. Chaque gramme de matière aurait pu dégager, aurait dû dégager, cette quantité énorme de chaleur. Comme le rayonnement du Soleil est de 2 calories par gramme et par an, la formation des atomes a pu fournir une énergie suffisante pour entretenir ce rayonnement pendant 80 milliards d'années.

Que tous les atomes soient formés d'hydrogène, cela peut être regardé comme un fait de plus en plus acquis. Tout le reste n'est qu'hypothèse.

C'est un fait également acquis, même avant Einstein, que la masse est relative, tout comme le poids. Ce n'est pas un invariant, lié à la matière, c'est une résultante. C'est le résultat de la résistance électromagnétique du milieu sur les atomes de matière, qui sont eux-mêmes des complexes électromagnétiques. On comprend très bien que cette résistance du milieu, sur un agrégat intime d'atomes d'hydrogène, ne soit pas exactement proportionnelle au nombre de ces atomes d'hydrogène. C'est le contraire qui étonnerait. C'est cette proportionnalité exacte qui aurait besoin d'être démontrée, avant d'être prise comme base.

D'ailleurs, même en admettant cette proportionnalité exacte, la différence des poids atomiques avec le nombre entier peut s'expliquer plus rationnellement, au moyen

des découvertes les plus récentes, par la présence des isotopes. Il est vrai qu'on n'a pas trouvé d'isotopes dans l'oxygène, le carbone, mais la proportion de l'isotope inférieur y serait seulement de 0,0077 et difficilement décelable. En tout cas la théorie ne pourrait pas s'appliquer aux corps simples formés d'isotopes, qui paraissent les plus nombreux. Il faudrait pouvoir déterminer à 0,001 près le poids atomique d'un isotope absolument pur, au moyen d'autres isotopes également purs. C'est un problème de très grande portée scientifique sans doute, mais que la chimie n'a pas encore résolu. En attendant l'idée n'est qu'une hypothèse.

De plus, on peut se demander si la théorie de la transformation de la masse en énergie ne repose pas sur un malentendu. Même si l'énergie rayonnée possède une masse, rien ne prouve que cette masse est empruntée au corps qui rayonne. Tout se passe *comme si* la masse rayonnante communiquait à une certaine masse du milieu la vitesse de la lumière. Il n'est pas nécessaire que cette masse soit *émise*.

D'ailleurs, même avant Einstein, l'énergie rayonnée pouvait être considérée comme possédant une masse, une *masse relative* au point de vue envisagé, bien entendu. On appelle en effet énergie toute entité dont les dimensions physiques répondent à la formule $M\,L^2T^{-2}$, ou $MV^2$. Comme l'énergie rayonnée possède une vitesse V, qui est celle de la lumière, elle possédera, par le fait même, une masse correspondante M, définie par cette formule, et qui n'aura *pas d'autre réalité*, que celle qui lui est octroyée par cette formule mathématique. Elle correspond simplement à une certaine masse du milieu ébranlé par le rayonnement, la masse qui posséderait la même énergie

dans la théorie de l'émission. C'est d'ailleurs la quantité de mouvement MV, correspondant à cette *masse fictive*, qui donne la pression de radiation due au rayonnement, tout comme la pression d'un gaz sur une paroi dans la théorie cinétique. L'assimilation est encore ainsi rendue plus nette, mais ce n'est qu'une assimilation.

6. **Conséquences et difficultés de l'hypothèse.** — M. J. Perrin introduit une autre hypothèse, qui n'est pas explicitement formulée, c'est que ce dégagement d'énergie a été parfaitement régulier pendant les 80 milliards d'années, et à peu près le même qu'actuellement. Or, nous ne savons absolument rien sur le mode de formation ou de transformation des atomes, sauf pour les corps radioactifs, où les transformations se font en sens inverse, des atomes lourds en atomes légers, et que M. Perrin exclut de son hypothèse.

Rien ne prouve que l'hydrogène se soit formé d'abord, pour former les autres atomes ensuite, et les former progressivement pendant 80 milliards d'années. Ils ont dû probablement se former ensemble, dans la nuit des temps. Avant que les atomes ne soient formés, la matière pondérable n'existait pas. L'attraction n'existait pas. Les astres et le Soleil n'ont pu se former qu'*après* la formation de leurs atomes constituants. Par conséquent, toute l'énergie de formation de ces atomes a dû se dégager *avant* la formation du Soleil et n'a pu contribuer en rien à entretenir sa chaleur.

M. J. Perrin dit à propos du temps d'évolution et de sa régularité : « On reste, je pense, bien au-dessous de la vérité en disant que, il y a *un milliard d'années* environ, les conditions climatériques terrestres ne différaient guère

des conditions actuelles, en sorte que, durant tout ce temps, le Soleil a dû rayonner à peu près comme il rayonne aujourd'hui » [1].

Or, nous savons actuellement que la température sur la Terre est proportionnelle à celle du Soleil. Une élévation de 0,1 seulement, soit de 600 degrés de la température du Soleil suffirait pour élever de 28 degrès la température moyenne et faire remonter la flore tropicale dans les régions polaires. Il suffirait également d'un abaissement égal pour que la Terre soit à zéro degré, même à l'équateur, et complètement glacée. On ne connaît aucune cause au monde capable de régulariser la chaleur du Soleil à ce point qu'elle ne varie pas de un dixième pendant un milliard d'années. Du moins le mécanisme

[1] *L'Astronomie*, p. 52, 1922. Il est intéressant de rapprocher de cette affirmation celle d'Eddington. Dans un article de *Nature* (1923) il disait : « Je crois que nous pouvons dire bien définitivement que le Soleil était autrefois beaucoup plus chaud ». En publiant cet article dans *Smithsonian report* (1923) il ajoute en note, en disant qu'il y a depuis des faits nouveaux. « Je crois que nous pouvons dire maintenant bien définitivement que la chaleur du Soleil n'a pas été altérée sensiblement depuis 10 milliards d'années. » Il se moque un peu. Il oublie même complètement les périodes glaciaires, il y a seulement 10.000a ns, qui introduisirent une modification appréciable de la température terrestre et nous invitent à être plus réservés vis-à-vis de la température du Soleil. Il dit dans le même paragraphe que les 20 millions d'années de chaleur de lord Kelvin n'ont pas plus de valeur scientifique que les milliers d'années de l'archevêque d'Ussher. Il serait plus juste de dire, devant un si rapide changement d'opinion, que les 10 milliards d'années d'Eddington n'ont pas plus de valeur que les milliers d'années de l'archevêque. Il faut ajouter enfin qu'Eddington dans cet article ignore totalement les calculs de Joly sur la salure des mers. (The borderland of astronomy and géology, *Nature*, 1923).

de cette régulation serait beaucoup plus difficile à expliquer que l'origine même des milliards d'années de chaleur.

D'ailleurs si ce phénomène de production de chaleur était un phénomène à ce point régulier dans le temps et dans l'espace, il s'appliquerait à tous les astres, aux étoiles et à la Terre. L'énergie produite serait proportionnelle à la masse, l'énergie rayonnée serait proportionnelle à la surface S et à $T^4$ d'après la loi de STEFAN, T étant la température absolue de la surface. Dans l'état d'équilibre ces quantités sont égales. On a,

$$E = E_1 m = \frac{4}{3}\pi\rho E_1 r^3 \qquad E' = \sigma S T^4 = 4\pi\sigma r^2 T^4$$

d'où

$$T^4 = \frac{E_1}{3\sigma}\rho r = k\rho r,$$

$k$ est une constante, $\rho$ la densité et $r$ le rayon de l'astre. Cette formule donne la température d'équilibre T. La température superficielle du Soleil étant de 6.000 degrés, celle de la Terre devrait être de 1.140 degrés. Il est loin d'en être ainsi, même avec la chaleur apportée par le Soleil.

D'après la formule de STEFAN

$$Q = \sigma T^4, \qquad \sigma = 5{,}32 \times 10^{-5} \text{ ergs} = 1{,}28.10^{-12} \text{ cal}$$

chaque $cm^2$ de la surface de la Terre devrait perdre 2,16 calories par seconde dans l'hypothèse de M. J. PERRIN. Or, le gradient de température à la surface est de un degré par 30 m. dans un sol où le coefficient de conductibilité est 0,0015 environ. La perte de chaleur correspondante est seulement de 0,0015 : 3.000 ou $5.10^{-7}$ calories

par seconde. C'est une quantité plus de 4 millions de fois moindre que celle exigée par l'hypothèse.

Pour les étoiles l'énergie rayonnée serait directement proportionnelle à leur masse. En désignant par $\mu$ les grandeurs stellaires absolues, à la même distance, par I les intensités lumineuses, T les températures, $r$ et $m$ les rayons et les masses, on a, pour deux astres différents, la formule

$$\mu - \mu' = \frac{5}{2}\log\frac{I'}{I} = \frac{5}{2}\log\frac{T'^4 r'^2}{T^4 r^2} = \frac{5}{2}\log\frac{m'}{m}.$$

Or, les grandeurs *moyennes* absolues des étoiles, des B aux M, des étoiles blanches aux étoiles rouges, diffère à peu près de 10 grandeurs. Le logarithme du rapport des masses serait égal à 4. La masse moyenne des étoiles blanches devrait être 10.000 fois plus grande que celle des étoiles rouges. Or, d'après les évaluations les plus récentes et les plus sérieuses [1] nous trouvons une différence de 10 grandeurs entre les $B_3$ et les $M_a$ alors que les masses sont seulement 140 fois plus grandes, au lieu de 10.000.

Pour résumer les théories chimiques et physico-chimiques nous pouvons dire que un gramme d'hydrogène transformé en atome a donné 45.000 calories. C'est trop peu. Un gramme de radium aurait pu donner 1,5 milliards de calories et un Soleil de radium aurait fourni une énergie équivalente à 700 millions d'années de chaleur au taux actuel, mais son émission est trop lente et décroît trop vite. Un gramme d'hélium, produit de la transformation du radium, aurait donné 43 milliards de calories,

1 The Masses and densities of the stars, H. Seares *Astr. Journal*, t. 55, 1922 et *Contributions from Mt Wilson Obs.* n° 226.

20 milliards d'années de chaleur pour un Soleil formé d'hélium, mais la proportion y est trop faible. La formation des atomes, d'après la théorie de M. J. Perrin, aurait donné 166 milliards de calories par gramme, et 80 milliards d'années de chaleur, mais le calcul repose sur une hypothèse gratuite, cette chaleur aurait été produite et perdue *avant* la formation des astres, et rien n'aurait régularisé le rayonnement, à l'encontre de ce qui se passe dans la radio activité.

7. **Les théories astronomiques et l'énergie de gravitation.** — Robert Mayer, qui a eu le premier l'idée de la transformation du travail en chaleur et réciproquement, en a fait aussi l'application à l'entretien de la chaleur solaire. Cette idée a été reprise et développée par W. Thomson, (lord Kelvin), qui l'a ensuite abandonnée, pour se rallier à la théorie d'Helmoltz, laquelle reste encore la théorie la plus explicative.

D'après l'*hypothèse météorique*, de Mayer et Thomson la chaleur du Soleil serait entretenue par la chute de particules météoriques dont la force vive se transforme en chaleur, d'après la formule

$$\frac{1}{2}v^2 = \gamma R = f\frac{M}{R^2}.\ R = f\frac{M}{R} = V.$$

M et R sont la masse et le rayon du soleil, $\gamma$ l'attraction à la distance R, $f$ la constante de l'attraction, ou constante de Gauss, égale à l'inverse de $3862^2$, en prenant la seconde comme unité de temps, et $v$ la vitesse de chute à la surface. La dernière expression représente le potentiel ou l'énergie potentielle V. La vitesse $v$ atteint 612 km : sec. Elle donne $2{,}10^{15}$ ergs ou 48 millions de calories

par gramme, nombre intermédiaire entre celui fourni par l'énergie chimique et l'énergie radioactive.

A ce taux, la chute de tous les éléments du Soleil pour le former aurait donné 24 millions d'années de chaleur. (En réalité il faut réduire ce nombre aux 3/5, soit 14 millions d'années, comme on le verra). Pour entretenir la chaleur du Soleil pendant un an il suffirait d'une chute, dont la masse serait 24 millions de fois plus petite que celle du Soleil. Elle formerait une couche d'épaisseur 8 millions de fois plus petite que celle du rayon, soit 100 mètres seulement, augmentation inappréciable.

Mais l'accroissement de la masse du Soleil aurait pour effet d'accélérer la rotation de la Terre et de raccourcir l'année. Ici la grandeur de la perturbation serait inadmissible.

La troisième loi de Képler et celle de la constante des aires, qui est conservée ici, peuvent s'écrire, $a$ étant le grand axe de l'orbite, supposée circulaire, et T l'année, M la masse du Soleil,

$$4\pi^2 a^3 = fMT^2 \qquad 2\pi a^2 = CT.$$

On en déduit

$$M^2T = 2\pi\frac{C^3}{f^2} = C'^3, \quad \text{d'où} \quad \frac{\delta T}{T} = -2\frac{\delta M}{M},$$

$\delta T$ représente la *diminution* de l'année T, correspondant à l'augmentation de masse $\delta M$. La perturbation $\delta T$ serait donc 12 millions de fois plus petite que l'année, soit 2,6 seconde par an. Cette perturbation serait 500 fois plus grande que la variation de l'année qui est seulement de 0,53 seconde par siècle, d'après les calculs de Newcomb.

De plus l'année T varierait proportionnellement à $\delta T$. Soit $l$ la longitude moyenne de la Terre, on peut écrire en désignant par $t$ un certain nombre d'années passées, $T_1$ la longueur de l'année actuelle,

$$T = T_1\left(1 + \frac{\delta T}{T_1} t\right) \qquad \frac{dl}{dt} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_1}\left(1 - \frac{\delta T}{T_1} t\right).$$

En intégrant de o à $t$, et en représentant par $\delta l$ la variation totale de la longitude correspondant à $\delta T$ on a

$$l = \frac{2\pi}{T_1}\left(t - \frac{1}{2}\frac{\delta T}{T_1} t^2\right) \qquad \delta l = -\pi \frac{t^2}{T_1^2} \delta T.$$

D'après la valeur de $\delta T$ ci-dessus, l'accroissement $\delta l$ serait égal à $2\pi$ pour une durée de 5.000 ans. La Terre aurait parcouru une circonférence de moins, depuis 5.000 ans de nos années actuelles [1]. Il se serait écoulé une année de moins depuis 5.000 ans, ce qui n'a certainement pas eu lieu.

W. THOMSON a essayé de supprimer cette difficulté en admettant un essaim de particules décrivant des orbites à peu près circulaires et intérieures à l'orbite de la Terre, comme le seraient les particules de la lumière zodiacale. La force vive de ces particules serait seulement moitié moindre. Leur concentration n'aurait plus de perturbation grave sur la marche de la Terre. Mais le calcul montre qu'une masse de particules égale à cent fois la masse de la Terre, ce qui serait énorme, ne suffirait pas pour entretenir la chaleur du Soleil plus de 5.000 ans.

[1] Le rédacteur des Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques parle d'une *augmentation* de la durée de l'année au lieu d'une diminution, p. 194. Il en résulte une différence de longitude *en plus* au lieu de en moins p. 195.

De plus, la concentration de cette masse troublerait toujours trop gravement le mouvement de Mercure. Si on les localise à l'intérieur de l'orbite de Mercure, la densité nécessaire devient trop grande pour ne pas troubler beaucoup trop la marche des comètes. On est conduit à se rapprocher de plus en plus du Soleil et à admettre finalement que la concentration des éléments qui doivent entretenir la chaleur solaire est la concentration même des éléments du Soleil par contraction.

La chute des éléments du Soleil vers leur centre, au moment de sa formation, a donc pu dégager une quantité de chaleur énorme. Cette formation semble terminée actuellement. Mais ces éléments peuvent continuer à se rapprocher du centre, par suite du refroidissement, et continuer à fournir de la chaleur par cette énergie de contraction ou de gravitation. C'est la théorie qui semble la plus simple, et définitive.

8. **Théorie de la contraction de Helmholz. L'âge du Soleil et l'astronomie.** — L'énergie potentielle ou l'énergie de gravitation pour une masse quelconque, puis pour une masse homogène sphérique est donnée par les formules,

$$W = \frac{1}{2}\iint \frac{dm\,dm'}{r} = \frac{1}{2}\int V\,dm, \qquad V = \frac{3M}{2R} - \frac{Mr^2}{2R^3},$$

où $dm'$ et $dm$ sont deux éléments de masse quelconque situées à la distance $r$, V est le potentiel à l'intérieur, sur la couche sphérique de ce rayon $r$, R est le rayon total.

Cette énergie de gravitation est la même que celle de formation, déterminée dans la théorie précédente. La pro-

duction d'énergie $dW$ due à une masse $dm$, s'ajoutant à la surface d'une masse sphérique $m$ à la surface de laquelle le potentiel est V est

$$dW = V dm = f\frac{m}{r}\cdot 4\pi\rho r^2 dr, \qquad m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3.$$

En intégrant de $r$ à R, en supposant la densité homogène, on obtient la valeur de l'énergie totale W. On en déduit la variation $\partial W$ de W dans le cas où, la masse restant la même, le rayon se contracte de $\partial R$.

$$W = \frac{3}{5} f\frac{M^2}{R} = \frac{3}{5} VM, \qquad \frac{\partial W}{W} = -\frac{\partial R}{R}.$$

L'énergie potentielle V, à la surface, a été calculée ci-dessus. Elle donne 48 millions de calories par gramme. L'énergie totale W du Soleil, supposé homogène, serait de 14 millions d'années de chaleur au taux actuel.

La seconde formule indique la contraction $\partial R$ du rayon nécessaire pour produire l'énergie $\partial W$. Pour une année, $\partial W$ est 14 millions de fois plus petit que W, et $\partial R$ doit être 14 millions de fois plus petit que R, c'est-à-dire égal à 50 m. Il suffit donc que le Soleil se contracte de 50 m. par an pour entretenir son rayonnement.

De plus c'est là une conséquence mathématique, qui ne dépend d'aucune hypothèse sur la constitution physique ou chimique, sauf l'homogénité. Si le Soleil se contracte de cette longueur, la quantité de chaleur correspondante est nécessairement produite.

On a supposé la masse homogène. L'énergie produite sera plus grande s'il y a condensation vers le centre. Supposons réalisée une loi de densité, qui donnerait une

densité infinie vers le centre, et inverse de la puissance $n$ du rayon $r$, on peut écrire

$$\rho r^n = \rho_1 R^n, \qquad dm = 4\pi\rho_1 R^n r^{2-n} dr$$

on trouve en intégrant de o à $r$ et à R,

$$m = \frac{4\pi\rho_1 R^n}{3-n} r^{3-n}, \qquad W = \frac{3-n}{5-2n} \int \frac{M^2}{R}.$$

C'est pour les gaz parfaits que la contraction est la plus grande. Ils donneront donc le maximum d'énergie. La pression $p$ est dans ce cas proportionnelle à la densité $\rho$, en admettant une température constante, qui donne également une densité maximum au centre. La loi fondamentale de l'hydrostatique donne encore pour l'accroissement de pression $dp$, par cm²,

$$dp = -\gamma dm = -\int \frac{m}{r^2} dm = -\int \rho \frac{m dr}{r^2} = -K r^{2-n} d\rho$$

K est une constante obtenue en remplaçant $\rho$ et $m$, par leurs valeurs et introduisant $d\rho$. On en déduit qu'il faut faire $n = 2$, pour que $p$ soit proportionnel à $\rho$ partout, c'est-à-dire quel que soit $r$.

Le coefficient du second membre dans l'expression de W se réduit alors à 1. Il faut multiplier par 5/3 les 14 millions trouvés dans le cas de l'homogénéité. On obtient 24 millions d'années de chaleur.

H. Poincaré en donnant ce résultat ajoute « Cette durée calculée du rayonnement serait un *maximum* » [1].

1 Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques p. 202. Le nombre trouvé, 32 millions d'années, est un peu trop fort parce qu'il a pris

Nous avons vu les raisons qui en font un maximum. M. Auric a cru pouvoir extraire de la formule ci-dessus donnant W une quantité d'énergie aussi grande qu'on voudra [1]. Il remarque qu'en faisant $n = 5/2$ la valeur devient infinie.

Si on refait les calculs avec cette valeur de $n$ on trouve, en intégrant de R à $r$,

$$dW = \frac{1}{8} f \frac{M^2}{R} \frac{dr}{r}, \qquad W = \frac{1}{8} f \frac{M^2}{R} \log \frac{R}{r}.$$

La formule ne donne pas l'énergie correspondante à la partie intérieure à $r$, où la densité est d'ailleurs trop grande. Si on calcule la valeur du noyau $r$ telle qu'en le négligeant on obtienne pour W la valeur du maximum précédent on trouve que $r$ n'est que la 3000e partie de R et la masse négligée la 55e partie de la masse totale. La densité à ce niveau y serait déjà égale à 80 millions de fois la densité moyenne. Cela représente bien une impossibilité physique et il est inutile d'aller plus loin. La valeur donnée plus haut de 24 millions d'années reste un maximum.

D'ailleurs il semblait bien que demander à l'infini des mathématiciens, par un jeu savant de formules, de fournir une quantité immense d'énergie, c'était un amusement mathématique, qui ne pouvait correspondre à aucune réalité physique. Cela rappelle la théorie de Schmidt, qui au moyen d'une intégrale et d'un point

pour la constante solaire la valeur de Pouillet qui est « un peu trop faible », comme il le remarque lui-même. p. 201.

[1] Sur le calcul de l'énergie accumulée dans le Soleil lors de sa formation par contraction. *Comptes rendus Ac. Sc.* t. 167. p. 328. (1918).

lumineux, entouré d'une atmosphère, nous fait voir un Soleil grandeur naturelle [1].

Les nombres donnés ci-dessus dépendent de la constante solaire prise égale à 2. La valeur la plus sérieuse est 1,93. Elle peut tout au plus différer de 2 ou 3 dixièmes de la valeur admise. La valeur minimum de l'énergie s'abaisserait à 10 millions d'années, le maximum s'élèverait à 30 millions. La valeur la plus *probable* serait voisine de 15 millions d'années de chaleur, au taux actuel.

D'autres phénomènes, trop souvent oubliés par les astronomes qui tiennent aux milliards d'années et aux nombres « astronomiques », nous indiquent une évolution rapide surtout dans la période de formation.

L'évolution des étoiles nouvelles est extrêmement rapide. Leur éclat diminue de 5 à 10 grandeurs en quelques années. La courbe de leur variation d'éclat est la même que celle qui est donnée ici pour l'évolution d'une étoile et du Soleil (ch. 7). Si la période des Céphéides ne varie pas autant que le voulaient les calculs d'Eddington, elle a varié cependant en 100 ans et il est bien difficile de dire alors que le Soleil n'a pu varier depuis 10 milliards d'années. Enfin l'année varie de 0,53 seconde par siècle. En attribuant ce phénomène à la résistance du milieu on ne peut pas remonter à plus de 100 millions d'années en arrière, car alors Mercure et Vénus se trouveraient à la même distance.

En l'attribuant à l'accroissement de masse du Soleil, on lui trouverait une variation d'éclat appréciable.

Eddington a déduit de la théorie des pulsations, appli-

[1] Die Strahlenbrechrung auf der Sonne, J. B. Metzler. Stuttgart 1891, J. Bosler. Les théories modernes du Soleil, p. 74.

quée aux étoiles variables du genre céphéïde, que si l'entretien de leur chaleur était due uniquement à la gravitation, comme dans la théorie d'Helmholtz, leur période devrait diminuer de 40 secondes par an, ce qui n'est pas. La conclusion dépend des hypothèses faites. Il n'y a plus d'objection si les géantes sont formées d'une étoile centrale ordinaire, entourée au loin d'une enveloppe de particules, voir ch. 10.

On a tiré une autre objection astronomique du fait que dans les amas d'étoiles situés à 100.000 ans de distance nous voyons ces astres dans le même état que les étoiles voisines. Mais 100.000 ans ne produiraient pour le Soleil qu'une variation de température de 1 millième, certainement insensible pour une étoile.

Une autre objection, qui conduirait à admettre des centaines de milliards d'années, appuyée sur une théorie de la désagrégation des amas stellaires, à l'approche de la voie lactée, suppose ces amas en équilibre permanent, et bien d'autres hypothèses. On n'ose pas s'y arrêter. (V. J. Bosler, L'Evolution des Etoiles, p. 94).

9. **L'âge du Soleil et la géologie.** — Comme nous l'avons déjà fait remarquer, les millions d'années de chaleur, ou les milliards, calculés par les théories étudiées ci-dessus, ne nous donnent que des quantités de chaleur, produites par tel phénomène, mais non des temps réellement écoulés. Les temps sont calculés tous dans l'*hypothèse* que les causes envisagées ont conservé toujours la même intensité qu'actuellement. C'est une première approximation, une *seconde approximation* devra tenir compte de la variation possible ou probable de cette intensité.

Si le rayonnement solaire a été, par exemple, 10 fois plus considérable qu'actuellement, les 30 millions d'années de chaleur auraient été rayonnées en 8 millions d'années seulement. Au contraire, si ce rayonnement a été 10 fois moindre la durée serait portée à 300 millions d'années. On peut essayer de préciser les conditions du rayonnement dans le passé pour en déduire le temps écoulé et le comparer aux périodes géologiques[1]. La même étude nous donne les conditions du rayonnement dans le futur et nous laisse entrevoir l'avenir du Soleil, et celui de la Terre, qui y est intimement lié.

Les géologues ont cherché à évaluer la rapidité de formation des couches de l'écorce terrestre, érosion et sédimentation. Les inondations du Nil élèvent le sol de la vallée de quelques millimètres par siècle. De Lapparent a calculé que le Niagara ronge son seuil depuis 10.000 ans, ce serait l'époque où la dernière période glacière finissante aurait libéré les eaux des Grands Lacs. D'autres ont évalué la rapidité des dépôts aux estuaires de l'Amazone, du Mississipi, etc. Les mesures donnent de 3 à 20 ans pour former un millimètre de dépôt. On évalue à 30 kilomètres la hauteur des couches entassées depuis le cambrien, ce qui donnerait de 100 à 600 millions d'années pour l'accumulation de ces dépôts.

Là encore il faut faire remarquer que ce qu'on évalue ce ne sont pas des années, mais la quantité d'énergie ou de travail. C'est l'énergie correspondant au travail de l'érosion, pendant tant d'années, *au taux actuel*. Si les

[1] Contraction et évolution du Soleil A. Véronnet, *C. R.* t. 166. p. 642 et 812. (1918). — L'âge de la Terre. *L'Astronomie* (1923).

chutes d'eau étaient plus considérables, le travail de l'érosion était plus rapide, et inversement. C'est une question d'énergie et de puissance de travail, plus que de temps.

Le Soleil se contracte en se refroidissant. Il était donc autrefois plus gros et plus chaud, deux raisons pour qu'il ait épuisé plus vite encore son énergie disponible. Sa vitesse de refroidissement a été fonction de sa température et de son rayon. De plus sa densité est sensiblement égale à la densité limite du gaz et elle varie à peu près en raison inverse de la température, ce qui permet de relier le rayon à la température et de calculer le temps d'évolution. On trouve ainsi que la vitesse moyenne de rayonnement a été 15 fois plus grande qu'actuellement. Au lieu de rayonner depuis 15 millions d'années le Soleil aurait perdu en un million d'années seulement les 15 millions d'années de chaleur fournies par sa formation et sa contraction.

Considérons maintenant les phénomènes géologiques, leur accroissement de vitesse fut encore plus considérable. La température plus élevée produisait une évaporation plus grande, une chute de pluies plus abondantes et plus chaudes. Le travail de l'érosion et de la dissolution était considérablement accru. La période secondaire nous montre des fleuves d'une largeur normale de 20, 50, 100 kilomètres. Le Rhin s'étendait des Vosges à la Forêt Noire. Il y avait certainement quelque chose de changé.

D'après Van t'Hoff, la vitesse de toutes les réactions chimiques double en moyenne pour chaque élévation de température de 10 degrés. A une époque où la température était de 100 degrés, au-dessus de la tempéra-

ture actuelle, les phénomènes de dissolution devaient s'accomplir mille fois plus vite : $2^{10} = 1024$. A cette température l'ébullition de l'eau avait lieu à deux atmosphères. La quantité d'eau réduite à l'état de vapeur pouvait représenter plusieurs mètres d'eau, que le refroidissement de la nuit suffisait à condenser en pluie torrentielle [1]. La vitesse de formation des sédiments a pu être ainsi 1.000 fois plus rapide en moyenne qu'actuellement et n'exiger qu'un million d'années ou deux. En tout cas il est très certain que l'énergie du Soleil, quelle qu'elle ait été, a produit un travail d'érosion et de sédimentation beaucoup plus considérable si elle a été condensée en un million d'années, que si elle avait été dispersée sur 100 ou 1000 millions d'années.

Les géologues ont évalué l'âge des couches et des périodes géologiques d'après l'intensité des *causes actuelles*, des seules causes connues. C'est une théorie éminemment scientifique qui exclut les hypothèses extra-scientifiques que d'autres ont mises en avant. Mais si les moyens mis en œuvre sont restés les mêmes, il est faux de croire que leur intensité et leur travail soient restés également les mêmes. Les causes de l'évolution ont évolué comme tout le reste [2]. En première approxi-

[1] La quantité d'eau pouvait doubler pour 10 degrés, sa capacité de dissolution chimique et d'érosion physique était doublée également, d'où une vitesse de sédimentation 4 fois plus grande. Pour une augmentation de température de 20 degrés, que l'on trouve il y a 300.000 ans, la vitesse serait 16 fois plus grande, puis 64 fois il y a 400.000 ans. On voit facilement comment un million d'années ou deux auraient suffi largement avec une température plus élevée. (L'âge de la Terre, A. Véronnet dans l'*Astronomie* (1924).

[2] M. Martel, L'évolution souterraine, 1908, p. 85. « Les causes

mation et pour la solidité du résultat il fallait les supposer constantes. On avait une *limite maximum* du temps, non une valeur définitive. Une seconde approximation doit les supposer variables et tenir compte de leur puissance plus grande dans le passé. La connaissance de la variation des phénomènes physiques et chimiques en fonction de la température nous donne le moyen de le faire et permet ainsi, comme on l'a vu, de faire accorder, de *faire converger les différents calculs*, assez divergents en première approximation, de l'astronomie et de la géologie.

10. **L'âge de la Terre et la salure des mers. La radioactivité.** — L'évaluation la plus sérieuse de la longueur des périodes géologiques paraît être celle de Joly basée sur la salure des eaux de mer. En mesurant la quantité de sel apportée par l'eau des fleuves, actuellement, il évalue à 100 millions d'années le temps nécessaire. Ce n'est pas 100 millions d'années qu'il faut dire, mais 100 millions de fois la quantité d'eau déversée par les fleuves chaque année. Ce n'est pas la même chose. C'est d'ailleurs un maximum. Il faut défalquer la quantité de sel, dissout par la première condensation des eaux, et qui a dû être énorme, peut-être les 9 dixièmes. Des pluies considé-

actuelles sont sans doute les mêmes que les anciennes, mais leur puissance est bien déchue ». Voir également Zeil, *Comptes rendus*, t. 171. p. 477 (1920) sur l'érosion interne dont la déchéance s'accentue avec le temps. — L'accroissement moyen de la taille d'un jeune homme de 20 ans est de un millimètre par an. Evaluer l'âge des périodes géologiques d'après la vitesse des dépôts du quaternaire est aussi précis que d'évaluer l'âge d'un homme d'après sa taille et sa vitesse d'accroissement à 20 ans.

rables et plus chaudes ont pu facilement dissoudre le reste en un million d'années. D'ailleurs les sels les plus solubles se sont dissous plus vite et le phénomène n'a pu aller qu'en diminuant d'intensité.

Tous les calculs en seconde approximation s'accordent pour ramener l'âge d'évolution de la croûte terrestre à un million d'années ou deux. Les 15 ou 20 millions d'années de chaleur du Soleil ont été dispersés en un million d'années avec un rayon plus grand et une température plus élevée. Le travail de sédimentation des dépôts géologiques a été accéléré par l'évaporation et les chutes de pluie beaucoup plus considérables. On trouve aussi quelques millions d'années seulement. Il en est de même pour la salure des mers et tous les chiffres calculés par des méthodes très différentes, corrigés et précisés par un calcul en seconde approximation, deviennent tout à fait concordants.

Nous avons vu que tous les calculs géologiques ou autres nous donnaient une valeur maximum du temps écoulé. Tous les phénomènes quels qu'ils soient ont dû être *accélérés autrefois*. Il s'ensuit immédiatement que *l'évaluation la plus basse est aussi la plus probable*, puisqu'elle est également un maximum. Les calculs astronomiques nous donnent un maximum d'énergie solaire de 30 millions d'années, et c'est une donnée purement mathématique, où n'entre aucune part d'arbitraire. La salure des mers nous donne un maximum de 100 millions et ce phénomène général et régulier donne une évaluation plus sûre et moins arbitraire que celle de n'importe quel dépôt géologique. Tous les autres calculs devront tenir compte de ceux-ci.

Aucune autre hypothèse ne peut négliger le fait de la sa-

lure des mers. Si la Terre était constituée dans des conditions voisines des conditions actuelles depuis un milliard d'années par exemple, l'eau des mers serait *au moins* 10 fois plus salée qu'elle ne l'est actuellement et peut-être 100 fois. Ce serait un marais salant. Il faut en conclure que tous les autres phénomènes ou calculs qui donneront des nombres plus grands, ou bien sont hypothétiques, ou contiennent des erreurs d'interprétation.

Les phénomènes de radioactivité ont permis également d'évaluer l'âge de certaines roches, d'après les proportions de l'hélium ou du plomb dans les minerais d'uranium. Les nombres trouvés vont de 400 à 1.200 millions d'années. Les phénomènes de radioactivité paraissent indépendants de toute action extérieure. Si leur vitesse a toujours été la même on aurait une base sérieuse d'évaluation. Mais nous ne connaissons pas du tout la cause de la radioactivité et il est bien hasardeux de dire que les effets de cette cause n'ont pas pu varier depuis un million d'années. M. Perrin a mis en avant, comme hypothèse explicative de la radioactivité, l'action de rayons ultra X émanés de la terre. Cette cause, ou une autre, aurait pu varier énormément.

Il semble bien aléatoire également de baser un calcul de millions d'années sur quelques milligrammes d'hélium. Toutes les roches granitiques émettent de l'hélium. Il est difficile d'éliminer toutes les causes possibles de production d'hélium depuis un million d'années.

Les calculs reposent de plus sur l'hypothèse que l'uranium doit se décomposer complètement en éléments radioactifs et disparaître, comme les éléments de désintégration, intermédiaires entre l'uranium et le plomb. Mais, si l'uranium ne provient d'aucun autre élément, rien ne prouve

qu'il doive se comporter comme ces éléments de transformation à vie éphémère. Sa vitesse de transformation pourrait donc être exponentielle, et beaucoup plus rapide au début.

Enfin ces calculs nous donnent l'âge de formation des morceaux de roche analysés. Mais la Terre a été formée par la réunion de météorites, dispersés auparavant dans l'espace, et qui n'ont pas été fondus en entier en tombant sur le sol. L'âge de formation d'un bloc météorique n'est pas celui de la couche où il se trouve. Il s'en faut. Là nous pouvons trouver des centaines de millions d'années [1].

Ceci nous amène à distinguer, pour le Soleil lui-même, la période d'évolution et la période de formation. Dans la suite de l'histoire du Soleil, on peut dire que la formation est terminée et que l'évolution commence, quand il a atteint son maximum de température, pour se refroidir ensuite lentement.

Si nous remontons dans le passé du Soleil, au moyen des formules qui relient le rayon, la température et le rayonnement, on trouve que le Soleil avait une température double de sa température actuelle, soit 12.000 degrés, avec un rayon de 2 dixièmes seulement plus grand

[1] Les biologistes ont donné aussi des chiffres pour le temps nécessité par l'évolution des plantes et des animaux. Mais les plus sérieux des biologistes avouent qu'ils n'ont absolument aucun moyen d'évaluer le temps nécessité par l'évolution d'une espèce. Naturellement ceux-ci ne donnent aucun calcul et aucun chiffre. D'ailleurs, la théorie récente des mutations, d'après laquelle les caractères nouveaux accumulés dans les cellules reproductrices apparaîtraient brusquement, comme par une faculté explosive, enlève tout poids aux calculs anciens.

qu'actuellement, il y a environ un million d'années. Il aurait perdu les deux tiers de son énergie pendant cette période d'évolution. On ne peut pas remonter plus loin, car un Soleil plus chaud aurait perdu toute son énergie de formation antérieure en 65.000 ans, période négligeable devant l'autre.

Si nous remontons alors à l'origine de la formation du Soleil, au moment où toute la matière de l'univers était à l'état de complète dispersion, on peut calculer le temps de formation, et la température résultante, en fonction de la densité du milieu. Le temps total de formation peut atteindre 300 millions d'années, si le centre d'attraction primitif qui a formé le Soleil était réduit à un seul atome en plus. Mais, une fois la concentration amorcée, la formation des neuf dixièmes restant de la masse ne dépend plus que de la densité du milieu. Le temps de formation aurait pu atteindre 20 millions d'années, et la température 9 à 12 mille degrés [1]. L'évolution et le refroidissement auraient commencé ensuite.

L'évolution de la Terre aurait suivi une marche parallèle. Elle a pû être formée avant le maximun du Soleil et son évolution en serait allongée. En remontant dans le passé nous trouverions une température croissante et l'extension de la flore tropicale jusqu'au maximum solaire. Plus haut nous retrouverions une température décroissante en sens inverse et l'on pourrait expliquer ainsi les

[1] Temps et température de formation d'un astre. *Comptes Rendus Ac. Sc.*, t. 169, p. 844, 1919; — t. 170, p. 40 et 170, 1920. Le temps et la température se limitent d'ailleurs étroitement. Si on augmente le temps de formation, la température de formation diminue, et réciproquement.

traces laissées par les glaciers sur les roches de la période cambrienne.

11. **L'âge de la Terre et son refroidissement interne.** — La température dans le sol augmente en moyenne de un degré tous les 33 mètres ou 3 degrés tous les 100 mètres. A ce taux nous trouvons 900 degrés, température de fusion de la plupart des roches, à 30 kilomètres de profondeur. Si l'accroissement se maintenait constant jusqu'au centre, la température y serait voisine de 210.000 degrés.

Il ne doit pas en être ainsi. Les lois du refroidissement permettent de préciser, jusqu'à un certain point, la variation actuelle de la température et même son évolution dans le temps. Les premières idées émises là-dessus par Poisson furent mises en formules et traduites en chiffres par lord Kelvin.

On suppose à l'origine la Terre à une température uniforme $T_0$. La surface se refroidit alors comme dans le problème du mur indéfini de Fourier [1]. La variation de température T, par rapport à la profondeur $x$ et au

[1] On vérifie facilement par les résultats que le refroidissement n'a pu pénétrer qu'à une cinquantaine de kilomètres et que la surface pouvait être considérée comme plane. H. Poincaré, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, p. 213. A 80 kilomètres, par exemple on trouve la température centrale à 0,001 près. On trouve 900 degrés à 37 kilomètres de profondeur en admettant 1 200° pour la température intérieure et à 30 kilomètres en admettant 3 600°. La zone de fusion des roches est certainement comprise entre 30 et 40 kilomètres. D'ailleurs la zone d'écrasement des roches sous la pression serait encore plus rapprochée et les couches inférieures pulvérisées ne pourraient plus être considérées comme solides quelle que soit la température.

temps $t$ est donnée par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{dT}{dt} = k\frac{d^2T}{dx^2}, \qquad k = \frac{K}{c\rho},$$

où $k$ ne dépend que de la conductibilité K, de la capacité calorifique $c$ et de la densité $\rho$ de la surface.

La solution de cette équation est donnée par

$$T = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} T_0 \int_0^x e^{-\alpha^2 x^2} dx, \qquad \alpha^2 = \frac{1}{4kt}.$$

Le degré géothermique $u$, ou la profondeur nécessaire pour un accroissement de un degré à la surface, est donné par la formule

$$u = \frac{\sqrt{\pi k t}}{T_0}, \qquad t = \frac{u^2 T_0^2}{\pi k}.$$

Cette dernière formule permet de déterminer le temps nécessaire pour le refroidissement à partir de la température initiale $T_0$ en fonction du degré géothermique $u$ et du coefficient $k$.

En prenant le mètre et l'année pour unités, lord Kelvin adopte 40 pour valeur de $k$. Avec un degré géothermique de 35 mètres, une température initiale de 3000 degrés, on trouve 100 millions d'années.

Poincaré dit (p. 213) : « On peut penser que les parties profondes de la Terre n'ont pas une température supérieure à celle-là ». Nous aurions donc un *maximum*.

On peut dire même que le refroidissement par conductibilité n'a pu commencer qu'après la solidification de la couche superficielle sur une épaisseur suffisante pour

lui assurer la stabilité permanente, résistance aux vagues et aux marées. Auparavant les parties solidifiées tombaient au fond et c'étaient les courants de convection, qui entretenaient le refroidissement, phénomènes beaucoup plus rapides. Si nous partons de la température de fusion des roches, soit 900 degrés, le nombre ci-dessus doit être divisé environ par 10. Nous compterions 10 millions d'années depuis la solidification de la surface.

Nous avons négligé les autres causes de refroidissement, cours d'eau et nappes d'eau souterraines, éruptions volcaniques énormes des périodes géologiques, courants polaires glacials au fond des océans. Nous devons considérer ces nombres comme un maximum.

De plus on a admis une température uniforme à la surface, et égale à la température de fusion. Nous verrons que dans le calcul de la température de formation, on trouvera un maximum de température à une profondeur égale au dixième du rayon, soit 640 kilomètres, et ce maximum serait voisin de 1.200 degrés pour la Terre. De ce point à la surface la température est allée en décroissant. Le refroidissement pouvait être déjà bien avancé à l'origine, et peut-être la surface solidifiée.

Le calcul ci-dessus dépend encore de plusieurs facteurs, qui peuvent donner des résultats assez différents. La valeur du nombre $k$ pour le fer peut varier de 0,14 à 0,28, pour la pierre et la terre de 0,012 à 0,004. Si l'on prend ce dernier nombre avec $u = 60$ m. et $T_0 = 3.000°$ on obtient un maximum de 815 millions d'années. Avec $k = 0,14$, $u = 20$ m., $T_0 = 600°$, on obtient le minimum de 103.000 ans. Les valeurs moyennes $k = 0,01$, $u = 33$, $T_0 = 900°$ donnent la valeur *probable* de 8,8 millions d'années. Les valeurs relatives au

fer $k = 0{,}14$, $T_0 = 1.200°$ avec $u = 20$ m. donneraient 400.000 ans.

La présence de *corps radioactifs* dans la Terre pourrait modifier ces conclusions, d'après STRUTT, EVE, etc. Il suffirait de 0,046 gr. de radium par million de tonnes en moyenne pour entretenir la perte de calories à la surface, alors qu'on en trouve de 1,4 à 1,1 gr. dans les roches de l'écorce. Mais on a vu que la conduction calorifique est tellement faible, que la chaleur produite resterait sur place sans parvenir à la surface. Il ne faut donc faire intervenir que le radium contenu dans l'écorce à une profondeur maximum de 40 kilomètres. Il en faudrait alors 50 fois plus qu'en considérant celui de toute la Terre, soit, 2,3 gr. par million de tonnes. La proportion connue (et elle diminue avec la profondeur), ne pourrait fournir que la moitié de la chaleur nécessaire. Les nombres calculés seraient à augmenter seulement de 50 % au maximum. Ils restent du même ordre.

12. **Mécanisme interne de l'entretien de la chaleur solaire.** — Quelle que soit la cause qui entretienne la chaleur du Soleil, il faut que la chaleur produite par les différentes couches intérieures soit transportée à la surface pour entretenir le rayonnement extérieur. Ce transport peut se faire par conduction, par radiation ou par convection.

Si l'équilibre interne du Soleil est un équilibre statique, sans déplacement matériel par des courants verticaux, les échanges ne peuvent se faire que par conduction ou radiation.

Dans le cas où le milieu est très absorbant, et peu transparent, le rayonnement d'une couche à l'autre est

défini par le coefficient de conductibilité $K$ et la quantité de chaleur, qui traverse chaque cm² de surface dans l'unité de temps, est

$$\frac{dQ}{dt} = K\frac{dT}{dr}.$$

Le Soleil émet environ 1.540 calories par cm² et seconde. Le coefficient de conductibilité maximum est celui de l'argent 1,1 calorie par seconde. En admettant ce coefficient il faudrait que le gradient de température soit de 1400 degrés par cm. ou une augmentation de 140.000 degrés par mètre, ce qui est complètement impossible.

Il faut remarquer que cette augmentation serait nécessaire non seulement à la surface, mais même à l'intérieur et dans le noyau dense, jusqu'à la profondeur où la régénération de chaleur serait nécessaire pour entretenir le rayonnement externe. On voit ainsi que, dès qu'un astre devient solide ou peu fluide sa température doit tomber brusquement. On ne doit pas avoir d'étoile de température très au-dessous de 3000 degrés.

Si le milieu est très transparent, le rayonnement qui traverse une couche provient de couches beaucoup plus profondes, qui participent toutes au rayonnement, nous aurons un équilibre radiatif. C'est celui qui a déjà été étudié par Eddington.

Appelons $T_e$ la température effective du rayonnement qui part de l'intérieur vers la surface, et $T'_e$ la température effective du rayonnement inverse, on aura pour le rayonnement qui traverse une couche quelconque

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma(T_e^4 - T'^4_e)$$

$\sigma$ étant le coefficient de la loi de Stefan. En calculant les températures effectives en fonction du coefficient d'absorption ou d'émission on obtiendra une formule analogue à celle de la conduction où le coefficient de conductibilité sera exprimé en fonction de la température vraie et du coefficient d'absorption. On pourra déterminer ce dernier pour le faire cadrer avec le rayonnement extérieur.

Dans le cas des courants de convection la quantité de chaleur convoyée par les courants ascendants sera égale à la chaleur rayonnée,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2}\rho c v \delta T = \sigma T_1^4$$

$\rho$ est la densité, $c$ la capacité calorifique, $v$ la vitesse des courants, $\delta T$ la différence de température entre les courants ascendants et descendants, ce sera aussi la chute de température à la surface où la température est $T_1$. On a $\frac{1}{2}$ en admettant que les courants ascendants occupent la moitié de la surface totale de chaque couche.

La densité étant 1,41 dans le noyau, en admettant une capacité calorifique égale à 1, celle de l'eau, on a $v\delta T$ égal à 2.300. Pour une différence ou chute de température de 1.000 degrés la vitesse devrait être seulement de 2,3 cm : sec. Pour 10 degrés elle serait de 2,3 m : sec ou 7,9 km. à l'heure. En admettant une capacité calorifique 0,1, celle du fer, la vitesse ou la chute de température serait multipliée par 10.

Ces vitesses, nécessaires pour l'entretien de la chaleur par les courants de convection ne sont pas considérables. Ils ont été mis en avant par Faye et d'autres. On a objecté

que la rigidité et la viscosité du Soleil opposaient un obstacle insurmontable à ces mouvements. M. Gouy montre qu'il n'en est pas ainsi [1].

La rigidité d'abord, est une rigidité purement apparente ou mathématique. Elle s'oppose aux vibrations, aux ondulations, aux petits mouvements. Elle ne s'oppose nullement aux mouvements d'ensemble.

La viscosité des gaz ne dépend pas de la pression. Elle croît avec la température à peu près comme $\sqrt{T}$. Pour un million de degrés on aurait la viscosité de l'eau pour l'air. On peut considérer cette valeur comme un maximum. De plus, on peut ajouter que la viscosité des liquides décroît avec la température. On aura donc ici, comme pour toutes les quantités physiques à l'état fluide, une valeur intermédiaire entre celle des liquides et celle des gaz.

M. Gouy considère la chute de sphères de plus grande densité, dans le milieu. La vitesse est donnée par la formule de Stokes,

$$v = \frac{2}{9} r^2 (D - d) \frac{g}{\eta}$$

$r$ est le rayon de la sphère, D et $d$ les densités, $g$ la pesanteur, $\eta$ le coefficient de viscosité. Avec une sphère de 14.000 km de rayon, le millionième du volume du Soleil, une différence de densité de 0,001, la vitesse serait encore de 10 cm : sec pour un viscosité égale à $2{,}2 \times 10^{17}$. Ce coefficient serait 100 millions de fois plus grand que celui de la poix. Il doit dépasser toutes les valeurs possibles

[1] Sur les courants gazeux à l'intérieur du Soleil. *Comptes rendus*. t. 170, p. 638 (1920).

pour des gaz ou des liquides. La viscosité ne peut-pas empêcher les mouvements de convection nécessaires pour entretenir le rayonnement superficiel du Soleil.

13. **Régime des courants d'entretien dans le Soleil.** — Les sphères gazeuses de M. Gouy ne pourraient pas persister longtemps dans le Soleil, car elles ne possèdent pas, comme les gouttelettes liquides, une surface de délimitation nette, maintenue par la tension superficielle. Leur déplacement devrait refouler les autres parties immobiles et celles-ci viendraient se mélanger aux molécules en mouvement qui se disperseraient très vite dans le milieu: Pour que le mouvement persévère il faut qu'il s'établisse un régime permanent, constitué par de véritables courants verticaux. Le frottement et la viscosité n'agiront que sur les parois de la colonne. On pourra leur appliquer les formules de l'hydraulique relatives au déplacement d'un liquide dans une conduite.

La vitesse limite sera donnée en fonction du rayon par une formule analogue à celle de Stokes, avec un coefficient environ moitié moindre. Les résultats restent du même ordre de grandeur. Il suffit de considérer de larges courants, analogues aux courants océaniques, pour obtenir de grandes vitesses.

Pour l'entretien du rayonnement superficiel nous devrons avoir, à la surface, et à une assez grande profondeur, la relation

$$\frac{1}{2}\rho c v \delta T = \sigma T_1^4 .$$

Cette formule nous indique qu'il doit y avoir *deux régimes différents* des courants dans le Soleil ; l'un dans

l'atmosphère entre la surface visible et celle du noyau, où la densité $\rho$ varie très vite, passe de 1 à 1.000, sur une profondeur de 50 à 100 km. et l'autre dans le noyau, où la densité reste sensiblement constante.

Dans le noyau nous pouvons prendre $\rho$ égale à la densité moyenne, $c$ compris entre 1 et 0,1. La formule déterminera la valeur moyenne du produit $v\partial T$, compris entre 2.300 et 23.000 en C. G. S.

Le courant ascendant va pénétrer du noyau dans l'atmosphère, où la pression diminue. Il se dilate. Sa vitesse de régime augmente proportionnellement à $r^2$, ou à sa section. Mais sa température diminue, plus ou moins adiabatiquement, par la détente, ce qui diminuera la hauteur atteinte. Quand la colonne arrive à la surface libre, le rayonnement abaisse brusquement la température. La densité croît. L'accélération résultante, qui était nulle, annulée par les frottements de viscosité, devient négative. La colonne s'élève alors, à partir de ce moment, jusqu'à une hauteur $h$ déterminée par sa vitesse à la surface et cette accélération, puis retombe en passant par les mêmes vitesses. On pourrait déterminer ici une seconde relation entre la chute de température $\partial T$ et la vitesse acquise $v$. Il est difficile de déterminer le moment où la vitesse de régime est atteinte.

En tout cas cette vitesse diminue avec la contraction à mesure que la colonne se rapproche du noyau. Elle doit donc s'écraser en partie à la surface du noyau, et pénétrer seulement en partie à l'intérieur, où le régime est plus stable.

En outre, si les courants ascendants et descendants occupent toute la surface extérieure au niveau de la photosphère, il n'en est plus de même au-dessous.

Les courants contractés n'occupent qu'une faible partie de la masse. Pour ces raisons il semble qu'il s'établira un régime de courants dans l'atmosphère, un autre dans le noyau, avec passage partiel de l'un à l'autre [1].

La contraction rapide des courants descendants permet d'expliquer facilement les mouvements tourbillonnaires. La légère différence de vitesse en latitude donne un certain moment de rotation à nos courants de large diamètre. Ce moment de rotation reste constant, alors que, par la contraction, le moment d'inertie varie comme le carré du rayon. La vitesse de rotation croît donc dans les mêmes proportions. Il se produit des effets de trombe, beaucoup plus vastes que sur la Terre. L'entonnoir une fois formé devient une zone d'aspiration, qui peut persister longtemps et donne les *taches*, en s'étalant à la surface du noyau.

On a vu qu'à la surface les courants ascendants se refroidissent, pour retomber ensuite. Dans les étoiles chaudes il peut arriver que le refroidissement, qui donne la condensation nécessaire pour produire le phénomène de l'éclat de la photosphère, soit atteint seulement quand le courant redescend déjà. La lumière envoyée par l'étoile aura donc une certaine vitesse positive en plus. Elle paraîtra s'éloigner de nous. Cela pourrait expliquer *l'excès de*

1 La surface du noyau, dans la théorie des gaz réels, est une véritable surface de discontinuité physique. Dans la théorie d'Emden les surfaces de discontinuité sont purement hypothétiques. Elles *peuvent* se produire. Aucune démonstration, ni théorique, ni numérique ne nous montre qu'elles *doivent* se produire, ni dans quelles conditions. *Annal. der Physik.* B. 7. p. 176. 1907, et *Gaskugeln*, 1907. Voir J. Bosler, Les Théories modernes du Soleil, p. 216.

*vitesse radiale des étoiles* B, de 5 km : sec. en moyenne. Les vitesses radiales considérables et opposées mesurées dans les étoiles nouvelles sont probablement celles de courants ascendants, extrêmement violents et peut-être d'ordre électronique.

## CHAPITRE VII

### ÉVOLUTION DU SOLEIL ET DES ÉTOILES. ÉVOLUTION CORRÉLATIVE DE LA TERRE

La connaissance de la constitution physique actuelle du Soleil et des étoiles, nous permet d'étudier comment se modifient avec le temps ces conditions physiques de rayon et de température. On a pu essayer de déterminer ces conditions dans le passé et dans l'avenir. Comme les conditions sur notre globe en dépendent étroitement, nous pourrons voir ainsi comment et dans quelles limites elles ont pu varier et pourront varier. Après avoir déterminé le mécanisme du refroidissement d'un astre et son accélération avec la température, nous étudierons plus spécialement les faits et les théories relatifs à l'évolution du Soleil et de la Terre.

1. **Mécanisme et vitesse de la contraction et du refroidissement d'un astre. Régénération de la chaleur.** — Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'hypothèse d'Helmholtz suffisait à expliquer l'entretien de la chaleur solaire. C'est aussi la seule qui permet de traiter scientifiquement le problème.

Appliquons le principe d'équivalence à l'astre tout entier, ou à la masse enfermée dans une couche de rayon $r$. Le travail de contraction $dW$ fournit l'accroissement d'énergie interne $dU$ et la chaleur rayonnée $dQ$. L'hypothèse d'Helmholtz consiste à supposer que l'énergie due à

la contraction est la principale. On peut déterminer alors la vitesse de contraction et de refroidissement d'un astre.

S'il y a génération interne de chaleur par radioactivité ou autrement, Q sera la différence entre la chaleur rayonnée extérieurement par la couche et la chaleur engendrée à l'intérieur, les conclusions sont les mêmes.

On a

$$dW = dU + dQ. \tag{1}$$

Soient

$$dQ = Q'dt \qquad \text{et} \qquad U = McET$$

la chaleur rayonnée extérieurement par la surface de la couche considérée et l'énergie interne U de la masse M, intérieure à cette couche, à la température moyenne T.

L'énergie totale, due au travail de contraction, dans le cas d'une densité uniforme est donnée par la formule[1]

$$W = \frac{3}{5} f \frac{M^2}{r} \qquad \text{et} \qquad dW = -W\frac{dr}{r}. \tag{2}$$

d'où l'équation fondamentale

$$U\frac{dT}{T} + W\frac{dr}{r} + Q'dt = 0. \tag{3}$$

On peut remplacer $dr$ par $dT$ au moyen de la relation générale déduite de la loi des gaz réels

$$\frac{dr}{r} = \frac{\rho_0}{4\rho - \rho_0}\frac{dT}{T} = k\frac{dT}{T}. \tag{4}$$

C'est une relation générale pour chaque couche, mais qui est applicable à l'ensemble, en définissant $\rho_0$ comme

[1] Dans le cas limite opposé, *contraction maximum* vers le centre, le coefficient 3/5 serait remplacé par 1. Les conclusions restent les mêmes.

la densité moyenne du gaz à la température moyenne correspondante. Seulement dans le cas d'une température uniforme, il y aurait identification rigoureuse. Mais on a vu que les températures centrale et moyenne restaient du même ordre. Il en sera de même pour les valeurs moyennes définies par (4).

L'équation fondamentale (3) donne alors, en remplaçant $dr$ par $d\mathrm{T}$, ou réciproquement, les relations suivantes :

$$(5) \qquad \frac{1}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt} = \frac{-\mathrm{Q}'}{\mathrm{U} + k\mathrm{W}}, \qquad \frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{-k\mathrm{Q}'}{\mathrm{U} + k\mathrm{W}}.$$

On obtient ainsi la vitesse de refroidissement $\frac{d\mathrm{T}}{dt}$ et la vitesse de contraction $\frac{dr}{dt}$. Ces valeurs sont seulement plus faibles si Q' contient une quantité de chaleur régénérée interne.

Si la régénération de chaleur par contraction, correspondant à $k\mathrm{W}$, n'existait pas, on aurait

$$(6) \qquad \frac{1}{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dt} = -\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{U}}, \qquad \frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = -k\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{U}}.$$

Ce serait la vitesse de refroidissement ou de contraction pure et simple. Elle sera ralentie dans la proportion indiquée par la valeur du dénominateur de (5).

On peut le mettre sous la forme,

$$(7) \qquad \mathrm{U} + k\mathrm{W} = \mathrm{MET}\left(c + \frac{3}{5}\frac{k\alpha\mathrm{R}}{\mu\mathrm{E}}\right) = \mathrm{M}c'\mathrm{ET}.$$

où en tenant compte des relations $\mathrm{R} = 2\mathrm{E} = 2(\mathrm{C} - c)\mu\mathrm{E}$,

$$(8) \qquad \frac{c'}{c} = 1 + \frac{3}{5}\left(\frac{\mathrm{C}}{c} - 1\right)\frac{\rho_0}{4\rho - \rho_0}f\frac{\mathrm{M}}{r}\frac{\mu}{\mathrm{RT}},$$

On voit sous cette forme que tout se passera comme si la capacité calorifique $c$ avait été multipliée dans le rapport $c' : c$. Cette quantité c'est donc la *capacité calorifique apparente, ou résultante.*

En considérant toutes les molécules comme biatomiques, $n = 2$, le facteur K de *ralentissement du refroidissement* pourra s'écrire d'après (7) A étant le poids atomique

$$(9)\quad K = \frac{c'}{c} = 1 + k\frac{W}{U} = 1 + \frac{3}{5}\frac{k\alpha}{Ac}, \qquad U = McET.$$

Pour les *astres condensés*, on a $\rho = \rho_0$ d'où $k = \frac{1}{3}$.

*Pour le Soleil*, on a $\alpha = 850.000$. En donnant à Ac (constante de Dulong) sa valeur moyenne 6,4 pour les liquides et solides, on obtient K = 26.000. Pour les molécules monoatomiques le nombre sera doublé soit 52.000. En appliquant directement la formule (8), déduite des lois des gaz, en admettant la même valeur de $\alpha$, on obtient 58.000 et 112.000, valeurs qui sont du même ordre que les précédentes.

Ainsi la contraction réduit la vitesse de refroidissement du Soleil de 26.000 fois sa valeur, au moins, à 100.000 fois, dans les conditions actuelles. Le refroidissement du Soleil au lieu d'exiger seulement des milliers d'années, comme ce serait le cas pour un refroidissement pur et simple, sans régénération de chaleur par contraction, peut en exiger des millions. On peut dire aussi que tout se passe comme si la capacité calorifique du Soleil était multipliée des milliers de fois, était par exemple de 30 à 100.000 calories par gramme, sa réserve de chaleur serait alors immense. On voit en somme que le facteur de ralentissement est proportionnel

à $\alpha$, c'est-à-dire à la masse M et inverse du rayon $r$ et de la température T.

*Pour Jupiter*, la valeur de $\alpha_1$, avec le même poids moléculaire $\mu$, serait environ 100 fois plus petite, avec la même valeur de T, ou 200 fois plus petite avec une température moyenne de 3.000°. La régénération de chaleur par la contraction aurait pu ralentir considérablement son refroidissement et lui permettre peut-être de rester gazeux. On peut en dire autant de Saturne.

*Pour la Terre*, rayon 110 fois plus petit et masse 333.000 fois plus petite, en admettant une température moyenne de 2.000°, la valeur de K serait 1.000 fois plus petite et égale à 27. Le ralentissement du refroidissement était beaucoup moins sensible. De plus, comme l'intérieur était liquide et non gazeux, il n'y aurait pas pu avoir brassage intime des éléments par convection. Le refroidissement a dû rester superficiel, et le travail dû à la contraction a été de ce fait négligeable.

Pour $\rho = \frac{1}{4}\rho_0$, on a $k = \infty$ d'après (4). La variation de température est nulle. C'est le *maximum de température*. Puis $k$ devient négatif pour les valeurs plus petites de $\rho$, c'est-à-dire pour une dilatation plus grande.

D'après (5) la valeur de $\frac{dT}{dt}$ est alors positive dans cet état. La température augmente avec le temps. L'astre se réchauffe donc, jusqu'à ce qu'il passe par le maximum de température pour $\rho = \frac{1}{4}\rho_0$. On voit de même par (5) que $\frac{dr}{dt}$ reste négatif. L'astre continue à se contracter avant comme après le maximum de température.

Pour les *dilatations extrêmes, nébuleuses diffuses*, $\rho$ est négligeable devant $\rho_0$ et $k = -1$, on a donc

$$(10)\quad \frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{-Q'}{U-W} = \frac{Q'}{W-U'} \qquad \frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{Q'}{U-W}$$

Or si l'énergie interne U, c'est-à-dire la quantité de chaleur interne possédée par la masse, est due uniquement à la contraction, cette énergie sera nécessairement, plus petite que le travail total W dû à la contraction, puisqu'il y a perte de chaleur par rayonnement, on a donc

$$(11)\quad U - W < 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dT}{dt} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dt} < 0$$

T augmente et $r$ diminue. *Il y a donc échauffement et contraction, même à la limite extrême de la dilatation.*

*Tout astre en équilibre physique dont l'énergie est due uniquement à la contraction, se contractera continuellement* à partir de l'état de nébuleuse diffuse, jusqu'à celui d'astre condensé, *la température moyenne d'équilibre croît jusqu'à un maximum pour décroître ensuite.*

S'il y a libération d'énergie sous une autre forme et dégagement de chaleur, par réactions intraatomiques ou intramoléculaires, la masse pourra gagner plus de chaleur qu'elle n'en perd par rayonnement.

On pourra donc avoir à un certain moment, c'est-à-dire pour un certain rayon $r_e$, une énergie interne ou calorifique U plus grande que l'énergie totale due à la contraction W, c'est-à-dire

$$(12)\quad U - W > 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dT}{dt} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dt} > 0.$$

Il y aurait alors dilatation et refroidissement.

Le premier cas du réchauffement et de la contraction,

même à la limite de diffusion, est celui des molécules monoatomiques et biatomiques. Le second cas est celui des molécules plus condensées comme on l'a vu. Il faudrait donc admettre que la formation de ces molécules de 3 atomes ou plus, est susceptible de dégager assez de chaleur pour réaliser ce cas.

M. Briner avait déjà trouvé dans la formation des molécules, à partir des atomes, plus de chaleur que n'importe quelle autre réaction chimique ne pourrait en fournir au Soleil (voir *Revue générale des Sciences*, 31 octobre 1917). C'était insuffisant, pour modifier l'évolution du Soleil. Ce serait suffisant ici pour renverser l'évolution d'une nébuleuse et la maintenir en équilibre, si la formation de ces molécules a précédé sa condensation. L'énergie radioactive ou intraatomique pourrait donner le même résultat. Le rayon $r_e$ où U — W changerait de signe, correspondrait à un équilibre instable, d'où la masse s'éloignerait indéfiniment, dans un sens ou dans l'autre.

Cette nébuleuse, qui se dilate et se refroidit, va-t-elle se refroidir jusqu'à zéro degré, pour que Q' soit nul dans (10) ? Non, mais jusqu'à la température T de l'espace où elle se trouve.

On aura alors une nébuleuse stable, car si la température de l'espace $T_1$ augmente, on a $Q' < o$, d'où $dT > o$ et $dr < o$. La température de la nébuleuse augmente jusqu'à $T_1$ et en même temps elle se contracte. On a le mécanisme inverse si $T_1$ diminue. On a vu plus haut les conditions d'équilibre de la masse solaire à l'état de nébuleuse [1].

[1] Voir en particulier A. Véronnet, *Comptes rendus*, Contraction

**2. Accélération du refroidissement dans le passé en fonction du rayon et de la température. Limites du temps d'évolution.** — On a vu dans le chapitre précédent que la théorie de la contraction de HELMHOLTZ donnait pour le Soleil une quantité de chaleur devant laquelle toutes les autres causes étaient négligeables.

La théorie de HELMHOLTZ exige que le Soleil se refroidisse et se contracte en rayonnant sa chaleur, tout comme un liquide normal. On a vu ci-dessus qu'en prenant la loi des gaz réels il en était bien ainsi pour une masse gazeuse telle que le Soleil. Avec la loi des gaz parfaits, au contraire, la masse s'échaufferait en rayonnant et en se contractant.

On peut résoudre alors intégralement le problème de sa vitesse de contraction et de la variation de ses conditions physiques avec le temps. En effet, la loi du rayonnement permet de déterminer complètement la courbe de variation de la température et du rayon d'un astre, même très loin dans le temps, connaissant les données actuelles, tout comme la loi de gravitation de NEWTON permet de déterminer la courbe d'une comète, même très loin dans l'espace, si l'on en a fixé quelques éléments.

L'énergie dépensée pour concentrer une masse homogène M de l'infini au rayon R et le travail de concentration de cette masse sont donnés par les formules (3).

D'autre part, la quantité de chaleur perdue par rayonnement est proportionnelle à la surface, c'est-à-dire à $R^2$ et à la quatrième puissance de la température, d'après la

des étoiles et équilibre des nébuleuses, t. 166, p. 901 (1918) et *Bul. Astron.* Constitution physique du Soleil et des étoiles. N° 10, t. 3 (1921).

loi de STEFAN. De plus, la quantité de chaleur $dW_1$, produite par la contraction, est sensiblement égale à celle-ci.

On a donc

$$(13)\ (14)\quad dQ = Q'_1 \frac{T^4 R^2 dt}{T_1^4 R_1^2} \qquad \frac{dR}{dt} = -\frac{Q'_1}{W_1} T^4 R^4.$$

$Q_1'$ est la quantité de chaleur rayonnée actuellement par an. On a $W_1 = 15 \times 10^6\ Q'_1$.

C'est-à-dire que l'énergie de contraction $W_1$ a pu fournir 15 millions d'années de chaleur. Dans le cas d'une concentration maximum il faudrait multiplier par $\frac{5}{3}$. La dernière formule donne la *vitesse de contraction*, à un moment quelconque, en fonction de T et de R. On voit que la vitesse de contraction était beaucoup plus rapide autrefois parce que le Soleil était plus gros et plus chaud, R et T plus grands. Le temps d'évolution a dû être diminué d'autant.

Mais T et R sont reliés à chaque instant par la *formule de dilatation* où $\alpha$ est le coefficient de dilatation cubique moyen du volume limite ou de la densité limite.

La température superficielle actuelle étant prise comme unité, et le rayon également, on a

$$(15)\qquad \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha T_1} = \frac{V}{V_1} = \frac{R^3}{R_1^3} = R^3$$

$$\text{ou}\quad T = \frac{R^3 - 1}{\alpha} + R^3$$

Dans le passé on avait $R > R_1$ ou $R > 1$, et, par conséquent, $T > R^3$, quel que soit $\alpha$. En remplacant T par $R^3$ dans (14) on obtient, pour le temps de contraction de

l'infini au rayon R, la *limite supérieure* suivante du temps d'évolution,

$$(16) \qquad dt \leqq -\frac{W_1 dR}{Q_1' R^{16}}, \qquad t \leqq \frac{t_1}{15}\frac{1}{R^{15}}.$$

On a $t_1 = 15$ millions d'années de chaleur environ. On en déduit que le régime présent du Soleil (contraction avec refroidissement, densité à peu près uniforme à l'intérieur) ne peut pas remonter à plus d'un million d'années dans le passé. Ce résultat est indépendant de la valeur de $\alpha$, regardé comme constant[1], comme aussi des hypothèses faites sur la température à l'intérieur, ou à la surface de l'astre. Il suffit que le rapport de la température superficielle à la température moyenne ne subisse pas de grandes variations.

En remplaçant au contraire, dans (14) $dR$ par sa valeur en fonction de $dT$ tiré de (15) et $R^3$ par T, on obtient la *limite inférieure* suivante :

$$(17) \qquad dt \leqq -\frac{\alpha t_1}{3(1+\alpha)}\frac{dT}{T^6}, \qquad t \geqq \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{t_1}{15}\frac{1}{T^5}$$

Cette limite dépend du coefficient de dilatation $\alpha$. Or, d'après l'accroissement de densité des planètes à mesure qu'on s'approche du Soleil, on peut attribuer à celui-ci un rayon double et un volume 8 fois plus grand que celui qu'il aurait à 0°. Il aurait ainsi à zéro une densité de $11{,}28 = 1{,}41 \times 8$. Dans ce cas, on aurait $\alpha = 7$.

C'est aussi la valeur du coefficient moyen de dilatation

[1] Amagat a montré que pour tous les corps, au-dessus de leur point critique, c'est-à-dire réduits à l'état gazeux, le coefficient de dilatation tendait vers une limite, qui restait constante, aux températures élevées, absolument comme pour les gaz ordinaires.

obtenu en extrapolant les coefficients des solides, des liquides et des gaz. On obtient alors $t \geqq 870.000$ ans. Avec $\alpha = 3$ on aurait $t \geqq 750.000$ ans (V. ch. 3, n° 9).

*En résumé* la loi de Stefan nous donne deux formules qui limitent étroitement dans le passé la durée du régime actuel du Soleil. La valeur probable est comprise entre 900.000 ans et 1 million d'années.

La valeur de $dT$ tirée de (15) et portée dans (14) donne encore, pour $R > R_1$,

$$(18)\quad \frac{dT}{dt} = -\frac{3(1+\alpha)}{\alpha t_1} T^4 R^6, \quad -\frac{dT}{dt} \geqq \frac{3(1+\alpha)}{\alpha t_1} R^{18}$$

La vitesse de refroidissement d'un astre est donc proportionnelle à la dix-huitième puissance du rayon. Elle est déjà 6 fois plus grande ou plus petite pour $R = 1{,}1$ ou $0{,}9$ et 26 fois pour une variation de $\frac{2}{10}$. Il est donc inutile de donner au Soleil, dans le passé un rayon, plus grand que 1,2. Le temps écoulé auparavant serait inférieur à 65.000 ans. La température aurait été environ le double. On en déduit ce résultat très important que notre Soleil n'a jamais dû être très différent de ce qu'il est actuellement ni comme rayon ni comme température, ni par conséquent comme état physique, et, que les calculs ci-dessus s'y appliquent intégralement.

On déduit de (18) la valeur du *refroidissement actuel* qui serait au *minimum de* $\frac{3}{t_1}$, c'est-à-dire $\frac{1}{5}$ pour un million d'années, ou de 0,02 pour 100.000 ans. Le refroidissement terrestre lui est rigoureusement proportionnel. A l'équateur nous avons 34° C. ou 307° absolus et à Paris 10° C. ou 283° absolus. Le refroidissement y sera respectivement de 6°,1 et de 5°,6 en 100.000 ans.

Nous avons vu que c'était d'ailleurs un *minimum*. Il n'y a là rien d'excessif dans cette variation, car les périodes glaciaires nous indiquent que nos contrées ont subi un refroidissement analogue il y a seulement 10.000 ans. Nous sommes loin des affirmations de ceux qui jugent que la température n'a pas dû varier depuis des milliards d'années, pourquoi pas d'ailleurs depuis 1000 milliards d'années, et plus[1] ?

**3. Calculs pratiques détaillés relatifs à l'évolution du Soleil.** — Dans la formule (14) qui donne la vitesse de refroidissement, en éliminant T ou R qui sont reliés par la formule de dilatation cubique (15) on obtient les deux formules

$$(19) \qquad dt = -\frac{\alpha(1+\alpha)}{3} t_1 \frac{dT}{T^4(1+\alpha T)^2} = -\alpha^4 t_1 \frac{dR}{R^4(\delta R^3 - 1)^4},$$

$t_1$ serait le temps écoulé depuis l'origine en supposant T et R constants : $t_1 = 15$ millions d'années environ. On peut décomposer la première expression en fractions simples et intégrer de l'infini à T.

On a posé $1 + \alpha = 8$ qui représente la dilatation totale actuelle du Soleil. La dilatation double probablement le rayon qu'il aurait à 0° et multiplie le volume par 8, c'est-à-dire $\delta = 8$. Les calculs ont été faits d'ailleurs avec 5 valeurs différentes de $\delta$. Les tableaux ci-après donnent le temps écoulé pour la contraction depuis tel rayon $R > 1$

[1] *Comptes rendus* A. VÉRONNET. Contraction et évolution du Soleil, t. 166, p. 642 (1918) et *L'Astronomie*. Constitution physique du Soleil, son évolution et la nôtre (1918).

jusqu'au rayon actuel et le temps qui s'écoulera pour la contraction jusqu'à tel rayon $R < 1$. Les temps sont exprimés en milliers d'années. Il est très remarquable que les nombres sont très voisins pour le même rayon et par conséquent dépendent assez peu du coefficient de dilatation et des conditions réalisées pratiquement par le Soleil. On a ajouté dans chaque tableau, pour chaque valeur du rayon, la valeur de la température du Soleil correspondant à $\delta = 8$, les autres valeurs n'en diffèrent que de quelques centièmes.

| R..... | 1.01 | 1.02 | 1.03 | 1.05 | 1.07 | 1.10 | 1.14 | 1.20 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta = \infty$... | 139 | 257 | 357 | 519 | 637 | 760 | 860 | 935 | 1000 |
| $\delta = 12$... | 137 | 257 | 357 | 506 | 618 | 732 | 822 | 916 | 943 |
| $\delta = 8$..... | 137 | 253 | 350 | 501 | 607 | 720 | 804 | 890 | 914 |
| $\delta = 4$..... | 131 | 246 | 334 | 475 | 571 | 665 | 734 | 800 | 816 |
| $\delta = 2$..... | 130 | 234 | 310 | 418 | 484 | 543 | 577 | 605 | 611 |
| T($\delta = 8$).... | 6200 | 6410 | 6620 | 7060 | 7520 | 8240 | 9260 | 11000 | ∞ |

| R..... | 0.99 | 0.98 | 0.97 | 0.96 | 0.95 | 0.93 | 0.90 | 0.86 | 0.80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta = \infty$.... | 163 | 354 | 579 | 843 | 1160 | 1970 | 3860 | 8600 | 27000 |
| $\delta = 12$.... | 164 | 360 | 589 | 866 | 1200 | 2080 | 4180 | 9900 | 32000 |
| $\delta = 8$..... | 164 | 360 | 591 | 875 | 1220 | 2140 | 4400 | 11000 | 43700 |
| $\delta = 4$..... | 164 | 371 | 625 | 935 | 1270 | 2410 | 5300 | 15400 | 86400 |
| $\delta = 2$..... | 170 | 411 | 747 | » | 2380 | 3700 | » | » | » |
| T($\delta = 8$).... | 5800 | 5600 | 5410 | 5220 | 5030 | 4680 | 4170 | 3490 | 2530 |

On voit que le temps écoulé depuis l'origine varie pratiquement de 820.000 à 940.000 ans seulement, pour $4 \leqq \delta \leqq 12$, avec valeur probable de 910.000 ans pour $\delta = 8$. La température pour un rayon $R = 1{,}2$ serait de 11.000°, c'est-à-dire moins du double de la température actuelle. Le temps de contraction antérieur serait seulement de 30.000 ans et négligeable. On voit sur le tableau que le rayon était de 1,01 et la température de 6.200 au

lieu de 6.000 il y 137.000 ans. La température terrestre correspondante était de 11 degrés plus élevée qu'actuellement, soit 22 degrés comme température en France, température tropicale.

Ce rayon était un dixième plus grand 1,1 il y a 720.000 ans environ, donc une température de 8.240 degrés. La température terrestre était relevée de 42° et tropicale jusque dans la région arctique. Le rayon sera réduit aux 9 dixièmes dans 4 millions d'années avec une température de 4.170° d'après le second tableau.

La figure ci-dessous représente les courbes de la con-

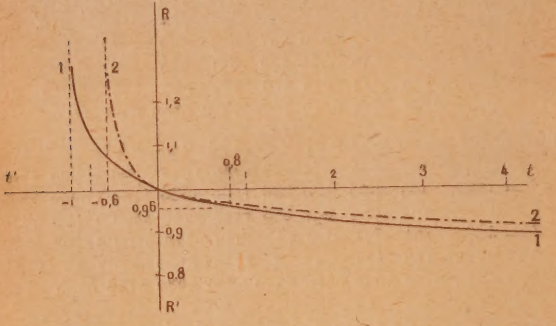


Fig. 23. — Courbes de contraction du Soleil. Le temps $t$ est exprimé en millions d'années. Courbe limite 1 pour $\alpha$ constant. Courbe 2 $\alpha$ minimum.

traction avec la valeur du rayon en ordonnée et le temps en abscisse. On voit combien la contraction est excessivement rapide au début, à haute température, excessivement lente à la fin. On aurait R = 0,86 dans 10 millions d'années avec une température superficielle de 3.500°.

Cette température serait probablement au-dessous de la température critique des métaux. La masse passerait de l'état gazeux à l'état liquide. Le mécanisme du brassage intime des éléments et de la régénération de chaleur par contraction se trouverait suspendu. La température baisserait rapidement à la surface et le Soleil s'éteindrait.

Dans le cas d'un *gaz parfait*, la température T est inverse de R et la vitesse de contraction $\frac{dR}{dt}$ est constante.

Le Tableau suivant donne les temps écoulés $t$, ou à écouler, dans cette hypothèse, pour différentes valeurs du rayon, ainsi que la température correspondante T à l'équateur de la Terre. Aux latitudes plus élevées elle serait proportionnelle à la racine quatrième du cosinus de la latitude.

Les temps sont en millions d'années.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R..... | 0.9 | 0.95 | 1 | 1.05 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.5 | 2.0 |
| $t$... | — 1.4 | — 0.7 | 0 | 0.7 | 1.4 | 2.8 | 4.2 | 7.0 | 14 |
| T.. | + 58 | 42 | 34 | 27 | 20 | 7 | — 4 | — 22 | — 56 |

Dans le cas d'un gaz parfait on aurait une température plus faible dans le passé, ce qui est contraire aux constatations géologiques, température de 4 degrés à l'équateur, il y a 4 millions d'années, avec un rayon égal à 1,3 le rayon actuel. On trouve au contraire la flore tropicale, les palmiers, jusqu'au Spitzberg. De plus, les végétaux de ces époques n'ont pas les couches alternées du bois, qui indiquent le ralentissement de la vie pendant l'hiver. C'était bien le climat tropical qui couvrait la Terre entière, non le climat polaire. A. Véronnet. Refroidissement et évolution du Soleil, *Comptes rendus*, t. 166, p. 286 et 812 (1918).

4. **Energie due à une contraction instantanée et température résultante.** — Il est intéressant de connaître la plus haute température que puisse réaliser un astre dans sa formation et voir si elle atteint ou dépasse le maximum théorique déterminé au chapitre 4.

Une nébuleuse gazeuse diffuse, isolée, à grand rayon, se refroidirait instantanément et se contracterait de même [1]. Si on la considère comme formée de particules isolées en mouvement, dont l'énergie cinétique diminue seulement par les chocs, elle se contracterait très lentement, mais resterait à température basse.

Le maximum de température sera réalisé par une contraction instantanée, où toute l'énergie produite sera employée à élever la température de l'astre. Les autres sources d'énergie, radioactivité, énergie intraatomique, etc., ne fourniraient qu'un appoint infinitésimal, pendant le temps très court de la contraction [2].

L'énergie fournie par la contraction est donnée par W de la formule (2)', l'énergie absorbée par l'élévation de température est donnée par U de la formule (9).

[1] Pour la nébuleuse solaire, supposée d'un rayon égal à 100.000 fois la distance du Soleil, l'épaisseur diamétrale correspondrait à 3 mm. d'air seulement. En la supposant d'un rayon égal à 10 fois la distance du Soleil cette épaisseur ne correspondrait encore qu'à 300 km. d'air. La nébuleuse ne pouvait certainement pas être en équilibre de rayonnement, ni exister normalement, pour un rayon plus grand.

[2] Si on fait agir ces sources d'énergie à l'intérieur d'un astre déjà formé, pour élever progressivement sa température, on verrait facilement que la perte par rayonnement extérieur équilibre très vite la chaleur fournie, à cause de la lenteur de dégagement de ces sources, de leur abaissement rapide. Les températures obtenues seraient encore inférieures à celles données par contraction instantanée.

S'il n'y a pas de perte ces deux quantités sont égales. On a entre le rayon $r$, la température T et la masse M la relation

$$(20) \qquad rT = \frac{3}{5} f \frac{M}{Ec}, \qquad Ec = \frac{1}{2} R \frac{n}{\mu} Ac$$

où $n$ est le nonbre d'atomes compris dans la molécule de masse $\mu$.

Or, on sait que, pour une température donnée, les capacités calorifiques atomiques sont constantes d'après la loi fondamentale de Dulong et de Petit, c'est-à-dire que le produit Ac du poids atomique par la capacité calorifique est une constante à très peu près égale à 6,4 pour tous les corps simples, à la température ordinaire. Les écarts qui sont de l'ordre de 0,1 seulement pour les poids atomiques, qui varient de 1 à 250, sont négligeables ici et montrent la précision de la loi et de la constante. En outre, la capacité calorifique tend vers zéro avec la température absolue et croît toujours avec la température. Il en est de même de la valeur de la constante 6,4. Les écarts pourraient sans doute s'atténuer en rapportant les valeurs de $c$ aux températures critiques. En tout cas la valeur de la constante 6,4 sera certainement une valeur *minimum*, aux températures envisagées ici.

En comparant la valeur de la formule ci-dessus avec celle des maximum des températures du chapitre 4, on en déduit que dans le cas des *molécules biatomiques* le rayon de l'astre est inférieur à son rayon au maximum de température théorique.

La température centrale $T_0$ obtenue par une contraction instantanée, sans perte de chaleur, est inférieure à celle du maximum des températures. De même la température

moyenne, dans la contraction instantanée, reste inférieure à la température moyenne maximum.

Dans le cas de molécules *monoatomiques* au contraire, le rayon serait un peu supérieur à celui du maximum de température. L'astre se comporterait au début comme un gaz parfait et sa température augmenterait jusqu'au maximum, pendant que le rayon décroîtrait. Ensuite l'astre se refroidirait en se contractant. Pratiquement la moindre perte de chaleur empêcherait d'atteindre le maximum.

Le Soleil supposé formé par contraction instantanée, avec répartition des températures de façon que la densité soit uniforme, et molécules biatomiques aurait eu un rayon 25 plus fois considérable que son rayon actuel, une température centrale de 37 millions de degrés et une température moyenne de 22,5 millions de degrés, avec poids moléculaire moyen de 220, chap. 4 n° 6.

La densité serait environ le $\frac{1}{10}$ de celle de l'air. Elle serait égale aux $\frac{2}{3}$ environ de la densité limite du gaz au centre. On peut déterminer sur quelle couche cette densité est égale au $\frac{1}{4}$ de la densité limite, couche qui délimite la partie extérieure qui se réchauffe en se contractant et se comporte comme un gaz.

Il n'y aurait que la partie superficielle au delà des $\frac{9}{10}$ du rayon, c'est-à-dire le $\frac{1}{4}$ de la masse qui n'aurait pas passé par le maximum de température. Cette partie jouant le rôle d'atmosphère, se comporterait comme un gaz. *Tout le reste de la masse, les* $\frac{3}{4}$, *jouant le rôle de*

*noyau, se contracterait en se refroidissant*, se comporterait comme un liquide, et le résultat final serait une contraction avec refroidissement, comme l'indique la valeur de la température moyenne.

Dans le cas de molécules monoatomiques on trouve pour une masse analogue au Soleil un rayon de 44,7 rayons solaires, plus grand que le rayon au maximum de température, c'est-à-dire 34, avec une température centrale de 51.300.000 degrés contre 57 millions au maximum. La température moyenne serait de 36 millions de degrés.

En admettant une dissociation limite extrême, de telle sorte que le poids moléculaire soit réduit à l'unité, on obtient un rayon de 11.6 seulement rayons solaires et une température centrale de 900.000 degrés seulement.

Nous avons vu au chapitre 4, n°7, que les couches superficielles n'auraient pas encore atteint leur maximum de température que, par exemple, les couches situées à 7 km. de profondeur n'atteindraient leur maximum de 15.600 degrés, seulement pour un rayon égal à 2,3 le rayon actuel. Théoriquement, un astre ainsi formé se contracterait donc en rayonnant et sa température effective augmenterait jusqu'à un maximum correspondant à un rayon assez faible. On aurait bien le cycle de Lockyer et Russel.

Mais les rayons obtenus ainsi ne sont pas assez considérables pour bien des géantes. Ils seraient d'ailleurs encore bien moindres en tenant compte de la variation de capacité calorifique et de l'ionisation. La contraction instantanée suppose des conditions tout à fait exceptionnelles, une nébuleuse complètement isolée. Nous verrons que les

températures de formation réelle sont beaucoup plus petites et les rayons également.

On ne peut donc pas chercher dans cette voie l'origine des *étoiles géantes* ni l'explication de leur équilibre physique avec des diamètres considérables et cependant des températures du même ordre que celles des étoiles naines du même type spectral.

D'ailleurs, comme on l'a vu, la *capacité calorifique* et le coefficient de DULONG et PETIT, nuls au zéro absolu, sont toujours croissants avec la température.

Si la capacité calorifique était multipliée par 10, le rayon ne serait plus que de 9,6 et la température centrale tomberait à 5 millions. Si elle était multipliée par 100, le rayon serait 5,38 et la température centrale de 890.000 degrés. La température moyenne se rapprocherait d'ailleurs de la température centrale.

Mais ces températures sont encore excessives et l'on peut admettre qu'elles produisent une dissociation et une ionisation des molécules, en éléments plus petits se comportant comme des molécules et des atomes.

Avec un poids moléculaire réduit à un, la *température centrale maximum tomberait à 26.000 degrés* seulement, pour un rayon égal à 9,6, en admettant que le coefficient soit multiplié par 10 à cette température. Or ce serait à peu près la valeur obtenue d'après la formule de l'accroissement de la capacité calorifique avec la température.

On voit donc que le jeu de la dissociation probable des molécules aux températures élevées, en même temps que l'augmentation de la capacité calorifique avec la température, tend à limiter la température maximum atteinte par la contraction d'un astre, et cela dans l'hy-

pothèse d'une densité uniforme, qui donne la température centrale maximum.

5. **Du sens de l'évolution d'un astre gazeux qui rayonne.** — On a vu au chapitre 4 qu'il y a un maximum de température pour une masse gazeuse en équilibre, qui suit la loi des gaz réels. Au-dessous du maximum, c'est-à-dire pour un rayon plus petit, la température et le rayon varient dans le même sens. L'astre se contracte, si sa température diminue. Au delà du maximum, au contraire, T et $r$ varient en sens inverse. L'astre se dilate si sa température diminue, et réciproquement. La température augmente à mesure qu'il se contracte.

Si l'astre rayonne et perd de la chaleur, sa température va-t-elle diminuer ? Il se peut qu'elle augmente au contraire, si la contraction régénère plus de chaleur que le rayonnement ne lui en fait perdre. Il faut donc pour déterminer le sens de l'évolution déterminer d'abord la variation de la température, correspondant à une variation de chaleur.

Le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail formule (1) permet de déterminer la variation de température $d$T pour une perte ou un gain de chaleur $d$Q. Pour les *gaz parfaits* on obtient les relations [1]

$$(21) \qquad Q'_T = \frac{dQ}{dT}, = nAcE - 3R = \left(\frac{n}{2}Ac - 3\right)R$$

$$(22) \qquad Q'_r = \frac{dQ}{dr} = -\frac{T}{r}(nAcE - 3R)$$

$$= -\frac{RT}{r}\left(\frac{n}{2}Ac - 3\right).$$

[1] A. Véronnet. Constitution physique du Soleil et des étoiles

La valeur de $c$ est assez mal déterminée pour les gaz permanents. On a Ac un peu plus petit que 3 en général. Pour $n = 1$ et $n = 2$, c'est-à-dire pour les gaz monoatomiques et biatomiques, cas général des gaz permanents, considérés comme gaz parfaits, la parenthèse sera négative. Alors $dQ$ et $dr$ seront de même signe, $dT$ sera de signe contraire. Toute perte de chaleur, $dQ$ négatif, entraînera une diminution du rayon, une augmentation de la température et cela pour toutes les couches. Tout astre rayonnant se contractera indéfiniment s'il se comporte comme un gaz parfait, et sa température d'équilibre augmentera indéfiniment. Il n'y aurait pas de maximum de température.

Pour $n > 2$, molécules à plus de deux atomes, la parenthèse est positive. Alors $dQ$ et $dr$ sont de signe contraire, $dT$ est du même signe que $dQ$. La température d'équilibre diminue et le rayon augmente avec la perte de chaleur. La masse gazeuse se dilaterait indéfiniment et sa température baisserait jusqu'à zéro, ou plutôt jusqu'à la température de l'espace où elle se trouverait, et y resterait en équilibre avec le rayon correspondant, nébuleuse froide et diffuse [1].

Portons la valeur $R = (C - c)\mu E$ dans (21), on aura, en remplaçant $nA$ par $\mu$,

$$\frac{dQ}{dT} = 3\mu cE\left(\frac{4}{3} - \frac{C}{c}\right) = -\frac{r}{T}\frac{dQ}{dr}. \qquad (23)$$

*Bul. Astr.*, p. 30 (1922). La formule (23) donne les mêmes relations au moyen des deux capacités calorifiques. La formule (21) au moyen de la constante de Dulong permet de relier plus facilement les gaz parfaits aux gaz réels ou même aux liquides et solides.

[1] Dans le premier cas, molécules mono et biatomiques, la con-

Pour les gaz monoatomiques et biatomiques on a

$$\frac{C}{c} = \frac{5}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{C}{c} = \frac{7}{5}.$$

Ces valeurs sont plus grandes que $\frac{4}{3}$ et la parenthèse négative pour les molécules biatomiques et monoatomiques. Pour les molécules plus condensées le rapport $C : c$ est plus petit que $\frac{4}{3}$ et la parenthèse est positive. On retrouve les mêmes signes et les mêmes conclusions qu'avec les formules précédentes [1].

La valeur de ce rapport est précisément égal à 4/3 dans l'équilibre radiatif d'Eddington, ce qui en fait un équilibre stationnaire et rend absolument impossible toute évolution dans ce cas. Les dérivées de (21) étant nulles le rayon $r$ et la température T restent constants quelque soit la perte de chaleur Q.

Pour les *gaz réels* on obtient [2]

$$(24) \qquad Q'_T = \frac{dQ}{dT} = nAcE + \frac{3\rho_0}{4\rho - \rho_0\rho_0 - \rho} \frac{R\rho_0}{}.$$

Or $\rho$ varie de $\rho_0$, pour les fortes condensations, à zéro pour les dilatations extrêmes. Donc $Q'_T$ est très grand et positif pour les astres très condensés où $\rho = \rho_0$, passe par

traction régénère la chaleur et retarde le refroidissement et la contraction. Ici la dilatation augmente encore la perte de chaleur et accélère le refroidissement.

[1] H. Poincaré. Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, p. 223.

[2] *Bulletin astr.* t. 3, p. 33 et *C. R.* t. 166, p. 286 (1918).

l'infini pour $\rho = \frac{1}{4}\rho_0$[1], devient négatif et tend vers la valeur des gaz parfaits formule (21) quand $\rho$ tend vers zéro [1].

Supposons d'abord que nous ayons des molécules de un ou deux atomes, ou du moins qui deviennent telles aux faibles pressions et grandes dilatations, cas des gaz parfaits. Alors $Q'_T$ ne s'annule pas, Q et $r$ varient toujours dans le même sens. Pour toutes les couches le rayonnement produit une contraction. L'astre se contracte toujours en perdant de la chaleur.

Supposons maintenant que nous ayons un gaz à molécules plus condensées formées de plus de deux atomes. Rien n'est changé pour les astres condensés, mais pour une certaine dilatation, le coefficient de contraction change de signe. L'astre se dilate en rayonnant et se refroidit jusqu'à la température de l'espace, on a une nébuleuse froide.

Enfin, si la chaleur interne produite par réaction chimique, radioactivité, ou si la chaleur reçue des astres environnants surpasse la chaleur rayonnée, l'évolution est renversée. Les astres condensés se dilatent. Un gaz monoatomique ou biatomique peut alors constituer une nébuleuse diffuse et froide en équilibre.

6. **Rayon maximum possible pratiquement.** — Nous avons vu plus haut qu'un astre qui se formerait par condensation instantanée, sans aucune perte de chaleur, pourrait tout au plus atteindre le maximum

[1] La variation de $Q'_T$ dépend uniquement du dénominateur du second membre, qui est maximum pour $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{5}{8}$. Pour cette valeur, $Q'_T$ aura sa valeur minimum entre deux valeurs infinies.

de température compatible avec l'équilibre physique. Son rayon, pour un astre analogue au Soleil, atteindrait seulement de 25 à 48 fois son rayon actuel. La perte de chaleur serait tellement énorme que l'équilibre physique serait ici absolument impossible.

Nous allons chercher à partir de quel rayon et de quelle température cet équilibre devient *théoriquement possible*, puis à partir de quel rayon il devient *pratiquement possible*.

Nous verrons alors que nous trouvons, même en remontant à l'origine, des conditions *physiques d'équilibre assez voisines des conditions actuelles*.

On peut admettre que l'équilibre physique ne peut pas exister, même théoriquement, tant que la vitesse de contraction, nécessaire pour entretenir le rayonnement correspondant à cet équilibre, est plus grande que la vitesse maximum que peuvent prendre les molécules de l'astre, sous l'action de la gravitation.

Cette vitesse maximum de chute V, à la surface d'un astre de masse M, de rayon $r$, est

$$V^2 = 2\gamma r = 2f\frac{M}{r}. \qquad (25)$$

D'autre part la vitesse de contraction d'un astre est donnée par la formule (5) ci-dessus. On voit facilement, par les calculs numériques que l'on peut toujours négliger ici le terme U, chaleur absorbée par la masse.

Nous avons alors pour la vitesse de contraction l'expression simple,

$$V = \frac{dr}{dt} = \frac{Q'_r}{W} = \frac{54\pi\sigma}{3fM^2}T^4r^4 = \frac{Q'_1 r_1 T^4 r^4}{W_1 T_1^4 r_1^4}. \qquad (26)$$

Egalons alors cette valeur à l'expression de la vitesse de chute maximum V donnée par (25) on aura

$$(27) \qquad r(rT)^8 = \frac{9f^3M^5}{8.25\,\pi^2\sigma^2}$$

$$\text{ou} \qquad \left(\frac{rT}{r_1T_1}\right)^4 \sqrt{\frac{r}{r_1}} = \frac{V_1W_1}{Q_1r_1} = \frac{V_1}{v_1},$$

En appliquant ces formules auSoleil, on trouve, suivant les lois de la dilatation admises, les deux limites 5,12 et 6,74. *Le rayon du Soleil, en équilibre physique, dans l'hypothèse d'une densité uniforme, n'a pas pu dépasser 6,74 fois son rayon actuel, même théoriquement.*

L'intensité du rayonnement serait alors énorme et la vitesse de contraction devrait être extrêmement rapide, pour l'alimenter. Elle serait comprise entre 271 et 236 kilomètres par seconde, *égale d'ailleurs à la vitesse de chute libre* sur le Soleil à cette distance $r$.

Avec ces vitesses la contraction serait totale en 3 h. 40 m. ou 4 h. 14 m. au plus. On voit à quel point l'équilibre envisagé ici est un équilibre purement théorique, puisque l'astre s'en éloignerait avec cette vitesse. Le rayon d'équilibre réel sera encore beaucoup plus petit que celui-ci.

Nous avons vu plus haut une formule (16) donnant le temps maximum nécessaire pour la contraction du Soleil jusqu'à un rayon donné. On a trouvé 1.200.000 ans pour la contraction au rayon actuel. La contraction uniforme au taux actuel étant de 15 millions d'années.

Or, d'après cette formule le temps de contraction est inverse de la 15e puissance du rayon. Le temps nécessaire pour se contracter jusqu'à un rayon égal à 1,2,

c'est-à-dire 2 dixièmes seulement plus grand que le rayon actuel, aurait été 20 fois moindre.

Enfin la vie du Soleil, antérieure au moment où son rayon était seulement un dixième plus grand que le rayon actuel, serait de 240.000 ans seulement au maximum. On peut voir d'après la vitesse de contraction exigée par le rayonnement que l'équilibre réel ne serait guère atteint avant cette limite, de sorte que *la vie du Soleil* en équilibre réel n'aurait pas dépassé un million d'années. *Son rayon maximum n'a pas dû dépasser pratiquement un dixième de sa valeur actuelle.*

7. **Evolution spectrale d'une étoile avec le temps.** On peut étudier de même l'évolution normale complète d'une étoile, du Soleil par exemple, pour nous rendre compte de l'influence du temps écoulé sur les grandeurs d'une étoile moyenne et son type spectral.

Les formules ci-dessus permettent de calculer facilement la température et par conséquent le type spectral à tel moment de l'évolution, formule (22), par conséquent le temps total passé dans tel type spectral, puis le rayon, proportionnel à $\sqrt[3]{}$ de la température, enfin la grandeur qui dépend du logarithme de $T^4 r^2$, formule (24). Ces résultats, pour le Soleil, sont consignés dans le Tableau suivant. Les temps écoulés depuis l'origine, ou dans chaque classe, sont proportionnels à la masse M, d'après (22).

| Types : | $B_0$ | $B_5$ | $A_0$ | $F_0$ | $G_0$ | $K_0$ | $K_5$ | $M_a$ | $M_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T : T_1 =$ | 2,06 | 2,02 | 1,86 | 1,40 | 1 | 0,85 | 0,67 | 0,61 | 0,50 |
| $t : 10^3 =$ | 32 | 36 | 72 | 220 | 1.200 | 2.700 | 8.900 | 14.200 | 38.000 |
| $r : r_1 =$ | 1,27 | 1,26 | 1,21 | 1,12 | 1 | 0,95 | 0,87 | 0,84 | 0,80 |
| $\mu =$ | −3,66 | −3,56 | −2,86 | −1,71 | 0 | +0,83 | +2,04 | +2,39 | +3,5 |

La première ligne donne l'indication du type spectral ; la seconde, le rapport de la température correspondante à la température actuelle du Soleil, d'après WILSING et SCHEINER ; la troisième, le temps mis depuis l'origine pour arriver à tel type spectral en milliers d'années ; la quatrième, le rayon correspondant par rapport au rayon actuel ; la cinquième, la variation de grandeur $\mu$, par rapport à la grandeur actuelle.

On voit par la troisième ligne que le temps maximum écoulé pour arriver au type B a été de 32.000 ans. Le Soleil n'a pu rester que 40.000 ans du type B, et 150.000 du type A, mais il est resté un million d'années, sur 1.200.000, du type F, avant d'arriver au type G. Le Soleil, et les étoiles en général ont dû passer les 5/6 de leur évolution dans le même type spectral. On peut admettre d'ailleurs que les étoiles ont perdu le 1/6 de leur énergie dans leur formation. On peut dire alors que *pratiquement les étoiles ont conservé le même type spectral depuis leur origine* [1].

Par la colonne $F_0$, on voit que le Soleil, à l'origine ainsi définie, aurait eu une température supérieure de 0,4 seulement à la température actuelle, soit 8.400 degrés, un rayon de un dixième seulement plus grand, soit 1,12, et une grandeur stellaire 1,7 seulement plus basse.

Si on envisage l'avenir, le Soleil resterait 1.500.000 ans dans la classe G, puis 12 millions d'années dans la classe K en augmentant de deux grandeurs seulement. La température ne baisserait de moitié, classe M*d*, que dans

[1] Sauf accident et choc produisant une étoile nouvelle et un rajeunissement. Les étoiles géantes qui en proviennent suivent un autre cycle.

38 millions d'années. [Sa grandeur aurait varié de 3,5 et son rayon de 2 dixièmes seulement.

Si la variation passée a été relativement rapide, elle sera dans l'avenir beaucoup plus lente.

8. **Les théories de l'évolution stellaire. Lockyer et Russell.** — Le P. Secchi avait distingué quatre grandes classes d'étoiles d'après leur spectre[1] ; les étoiles blanches ou à hydrogène, les plus chaudes ; les jaunes, à raies métalliques, analogues au Soleil ; les rouges, à bandes sombres et combinaisons chimiques, les moins chaudes ; avec à part les rouges foncées, étoile carbonnées. On admit naturellement alors que les étoiles évoluaient des plus chaudes au moins chaudes et devaient passer successivement par les stades d'étoile blanche, d'étoile jaune puis d'étoile rouge. On trouvait d'ailleurs tous les intermédiaires entre ces spectres et l'évolution était continue.

Sir Norman Lockyer vint compliquer cette idée simple, trop simple même[2]. En étudiant l'action de la température sur le spectre, il reconnut une gradation sensiblement continue dans l'apparition des raies quand on passe de la flamme à l'arc. Il reconnut l'apparition de raies nouvelles, les raies renforcées, quand on passe de l'arc à l'étincelle électrique, qui devaient indiquer une température encore plus élevée. Il reconnut de plus que ces raies renforcées dominaient sur certaines étoiles, dont le spectre paraissait le même que celui d'autres étoiles, mais où ces raies seules

[1] Le Soleil.

[2] The Chemistry of the Sun (1887). The meteoritic hypothesis (1890) L'évolution inorganique, Alcan (1905). *Proc, Roy. Soc.* t. 67 73, 76, et *Nature*, t. 96 (1916).

étaient atténuées. Il fut ainsi amené à distinguer deux sortes d'étoiles ayant sensiblement le même spectre, mais les unes avec des raies renforcées, les autres non.

Comme les raies différentes indiquaient des métaux différents, ou des états physiques différents, il en déduisit que ces raies spéciales devaient indiquer une dissociation de nos corps simples en éléments plus simples, plus primitifs, ou protoéléments. Il en déduisit encore que les étoiles à raies renforcées ou à protoéléments étaient des étoiles au début de leur évolution, d'abord rouges, puis jaunes, puis blanches. Elles atteignaient alors leur maximum de température pour redevenir jaunes, puis rouges.

En beaucoup de points Lockyer fut un précurseur. Les étoiles à raies renforcées sont les étoiles géantes. Les raies renforcées sont attribuées à l'ionisation, nouvelle forme de dissociation, et les protoéléments ne sont que les mêmes éléments ionisés. Les hautes températures interviennent pour les produire, mais les basses pressions au même titre.

On reconnut plus tard, par l'étude des parallaxes, que certaines étoiles, précisément celles à raies renforcées prédominantes, avaient un éclat absolu, une grandeur absolue très différente des autres étoiles de même caractère spectral. M. Hertzsprung appela géantes ces étoiles de grand éclat. Comme l'éclat absolu dépend de la température et du rayon, comme la tempèrature est la même pour le même spectre, on en conclut que ces étoiles d'éclat absolu considérable devaient être aussi des étoiles de très grand diamètre. C'étaient bien des géantes. Les diamètres calculés d'après l'éclat (Russell, Eddington Nordman) furent vérifiés par les mesures directes (Michelson et Pease).

Russell déduisit de ces faits une théorie évolutive analogue à celle de Lockyer. Les densités calculées pour les étoiles géantes, d'après leur masse et leur diamètre, sont très faibles, en supposant la densité homogène. On peut les considérer comme des gaz parfaits, qui se réchauffent en se contractant et en rayonnant de la chaleur, d'après les calculs de Lane. Dans cette théorie, les étoiles commenceraient donc par être des nébuleuses gazeuses à grand rayon et basse température. Elles se contracteraient et leur température augmenterait. Elles passeraient des étoiles rouges, aux jaunes et aux blanches, pour redescendre ensuite la pente des températures.

Mais la théorie de Lane ne nous indique pas de maximum de température pour les gaz parfaits. La température augmenterait infiniment avec la concentration, ch. 4. Pour trouver un maximum de température il faut appliquer la formule des gaz réels. Nous avons vu alors que la concentration est toujours très considérable, trop considérable même. Les températures les plus élevées, réalisées même par condensation instantanée, sans perte de chaleur, donneraient des rayons beaucoup plus petits que celui des étoiles géantes.

Ceci nous indique que les étoiles géantes doivent avoir une constitution spéciale, différente de celle des étoiles naines. Rien ne prouve que la surface extérieure visible soit la surface même de l'étoile. Les étoiles nouvelles et les nébuleuses planétaires nous montrent la formation d'enveloppes extérieures distinctes de l'étoile proprement dite, et le calcul de la densité d'après le diamètre extérieur pourrait être tout à fait illusoire. D'ailleurs les étoiles nouvelles et les planétaires se rattachent plus directement aux étoiles B et O, qu'aux M. Elles seraient hors série.

Il semble nécessaire de distinguer deux cycles évolutifs différents. Le cycle normal, où l'étoile une fois formée ne peut que se refroidir et se contracter, d'après les formules des gaz réels avec passage des étoiles blanches aux étoiles rouges. Le cycle des étoiles nouvelles, à température surélevée par la fusion d'un satellite ou d'une grosse planète à l'astre central. Ce cycle présenterait plusieurs cas suivant le degré de la température, l'importance de l'enveloppe de particules repoussées par la pression de radiation ; étoile planétaire ou étoile O si l'enveloppe ne cache pas complétement l'étoile centrale, étoile géante dans le cas contraire et alors évolution suivant le cycle Lockyer et Russell (voir chap. 10). D'ailleurs la formation normale dans le cas de fortes masses, comme on le verra, pourrait produire une température suffisamment élevée pour que la pression de radiation puisse constituer une enveloppe de particules et une étoile géante dès l'origine.

9. **Evolution de la température à la surface de la Terre.** — La géologie nous apprend que la surface terrestre a passé par des températures plus élevées et d'autres plus basses qu'actuellement. A la fin des périodes géologiques, dans le quaternaire, on trouve quatre oscillations de la température qui constituent les périodes glaciaires. En remontant plus haut on voit que la végétation tropicale avait envahi nos contrées pendant la période secondaire et remontait même jusqu'au Spitzberg. On ne peut pas dire que la température terrestre soit restée stationnaire pendant les périodes géologiques.

Tout le monde admet que la température de la Terre dépend à peu près uniquement du Soleil. De Lapparent expliquait l'extension de la flore des tropiques par

l'hypothèse d'un Soleil beaucoup plus gros, d'un diamètre de 45 degrés, dont les rayons seraient venus tomber normalement jusqu'à notre latitude.

Les lois mieux connues du rayonnement permettent de simplifier l'explication. Nous avons vu comment elles permettent de déterminer numériquement la température actuelle de la Terre, à l'équateur, en latitude, en altitude, en fonction de la température du Soleil. Elles permettent tout aussi bien de le faire dans le passé et dans l'avenir en fonction de cette même température.

Soient $T_1$ et $R_1$ la température et le rayon actuels du Soleil, T et R leur valeur à une époque quelconque, $T'_1$ la température actuelle de la Terre en un point quelconque, sa température T' à l'époque correspondante sera donnée par la loi de Stefan.

$$(28) \qquad \frac{T'^4}{T'^4_1} = \frac{T^4 R^2}{T^4_1 R^2_1}, \qquad \frac{T'}{T'_1} = \frac{T}{T_1}\sqrt{\frac{R}{R_1}}.$$

Calculons les températures avec différents rayons du Soleil de centièmes en centièmes, nous obtenons le tableau suivant relatif au passé, Soleil plus gros et plus chaud, périodes géologiques antérieures.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R = | 1,00 | 1,01 | 1,02 | 1,03 | 1,05 | 1,07 | 1,10 |
| T' = | 34 | 45 | 58 | 71 | 97 | 125 | 169 |
| | 11 | 21 | 33 | 45 | 69 | 95 | 135 |
| | 0 | 10 | 21 | 32 | 56 | 81 | 120 |
| $t : 10^3$ = | 0 | 137 | 253 | 350 | 500 | 600 | 720 |

La première ligne donne le rayon du Soleil pris comme base. La température du Soleil correspondante est donnée par le tableau du numéro précédent. La seconde ligne indique la température correspondante à l'équateur de

la Terre, actuellement 34° ; la troisième la température à la latitude de 45°, 11° centigrades actuellement ; la quatrième la température à la latitude où l'on a zéro degré maintenant. La dernière ligne indique, en milliers d'années, le temps écoulé, d'après les calculs précédents.

On voit que la température atteignait près de 100 degrés à l'équateur pour un rayon de 1,05 ou 5 centièmes seulement plus grand, la température du Soleil étant de 7.000 degrés ou 1/6 en plus seulement. Il y avait de cela 500.000 ans. La vie était alors impossible à l'équateur. Elle a dû commencer indépendamment aux deux pôles.

On aurait eu la température équatoriale de 33° à la latitude de Paris, pour un rayon solaire de 2 centièmes seulement plus grand, température solaire 6.240 degrés, soit 4 centièmes seulement plus grande. Il y aurait de cela 250.000 ans.

En remontant à 350.000 ans en arrière, on retrouve cette température équatoriale sur le parallèle de zéro degré. Le Soleil avait un rayon de 3 centièmes plus grand, une température de 6 centièmes seulement plus élevée. On retrouve en moyenne une élévation de la température terrestre de 10 à 12 degrés pour un accroissement de 1 centième du rayon solaire, correspondant à une élévation de la température solaire de 2 centièmes.

On voit que *les modifications*, considérables pour les êtres vivants, des températures et conditions physiques *des périodes géologiques, s'expliquent très simplement par des modifications très faibles des conditions physiques du Soleil*. De plus, les résultats des calculs sont rigoureusement précis pour la période actuelle, avec des limites étroites, pour le Soleil, aussi bien que pour la Terre. On

peut considérer qu'ils s'étendront aussi rigoureusement au passé avec une interpolation aussi faible, ne dépassant pas quelques centièmes.

Les mêmes calculs, pour un rayon plus faible et une température plus basse, donnent les *températures futures* à la surface de la Terre. Le tableau ci-dessous donne ces résultats, les valeurs des rayons solaires sont indiquées dans la première ligne :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R = | 1,0 | 0,99 | 0,98 | 0,97 | 0,96 | 0,95 | 0,90 |
| T' = | 34 | 22 | 11 | 0 | — 11 | — 22 | — 73 |
| | 11 | 0 | — 11 | — 21 | — 31 | — 41 | — 88 |
| | 0 | — 11 | — 20 | — 30 | — 40 | — 50 | — 95 |
| $t : 10^3$ = | 0 | 164 | 360 | 600 | 870 | 1.220 | 2.100 |

La température moyenne tomberait déjà à zéro degré à la latitude de Paris dans 164.000 ans, quand le rayon du Soleil aurait diminué de 1 centième seulement. On aura zéro à l'équateur pour un rayon diminué de 3 centièmes, dans 600.000 ans. La température moyenne serait alors de — 21 degrés à la latitude de Paris.

La température du Soleil serait encore de 5.400°. L'énergie qu'il nous envoie serait encore les deux tiers de l'énergie actuelle, exactement 0,63. L'utilisation rationnelle et scientifique de cette énergie énorme par une humanité plus évoluée qu'actuellement, pourrait suffire amplement à tous ses besoins, chauffage, élaboration des produits chimiques et alimentaires pour remplacer les végétaux, etc.

On peut croire que l'évolution, qui a commencé beaucoup plus tôt sur Mars, a pu aboutir à une humanité plus avancée que sur la Terre, et capable de s'adapter à une température beaucoup plus basse. La température à

la surface de la Terre, transportée à la distance de Mars, serait de 50 degrés plus basse, mais les conditions sur Mars, absorption, réflexion, atmosphère, peuvent modifier considérablement la température à la surface. Les mesures directes du rayonnement semblent bien indiquer en effet des températures plus élevées, ou du moins peu inférieures à zéro à l'équateur.

10. **Théories des périodes glaciaires.** — On a constaté dans le passé au moins quatre retours de périodes froides dans notre hémisphère. Les glaciers du Mont-Blanc s'étendaient jusqu'à Lyon et les glaces du pôle descendaient jusqu'en Belgique. De Lapparent a calculé, d'après le recul progressif de la chute du Niagara qui use et ronge son seuil, que la libération des grands lacs devait avoir eu lieu il y a environ 10.000 ans.

On a constaté dans nos régions l'apparition de l'homme dans la période chaude qui a précédé la dernière période glaciaire. Les anthropologistes attribuent à ces squelettes une antiquité de 20.000 ans environ [1].

On peut admettre qu'il y a pour les animaux, et pour

[1] D'autres calculs à vue de nez attribuent à la dernière période glaciaire une antiquité beaucoup plus fabuleuse, Croll 240.000 ans, dans Climate and time, in their geological relations (1875). Lyell 224.000, dans L'ancienneté de l'homme, 2e éd., p. 317. — Zaborowski 342 000 dans L'ancienneté de l'homme, t. 2, p. 229. — Blandet 325.000 ans, dans Chronologie des excentricités. *Bul. de la Soc. géol de France*, 3 sér., t. 6, p. 371. — J. Peroche 350.000 ans. Les Causes des phénomènes glaciaires et torrides, 1878. D'autres comme Hoptkins vont jusqu'à un million d'années. A ce compte la totalité des périodes géologiques atteindrait 100.000 milliards d'années. C'est de l'inflation qui enlève toute valeur réelle aux zéros.

l'homme en particulier, comme pour les plantes, une température optimum du développement. La grande chaleur ou le grand froid énervent ou fatiguent également. Les régions tempérées conviennent mieux au développement harmonieux et complet des facultés de l'homme, également déprimé par la vie trop dure ou la vie trop facile. On constate en fait que ces régions tempérées sont actuellement les centres principaux de la civilisation ; l'Europe, l'Amérique du Nord, le Japon : dans l'autre hémisphère : l'Argentine, le Cap, l'Australie. Or, si nous remontons à 10 ou 12.000 ans en arrière, nous trouvons les premières civilisations établies en Ethiopie et dans la Haute-Egypte, alors que dans nos contrées glacées l'homme, réfugié dans les cavernes, chassait le renne et l'ours blanc, tout comme les Lapons de nos jours. Puis la civilisation remonte, avec la température, successivement en Egypte, en Palestine et en Chaldée, en Grèce, à Rome, enfin dans l'Europe moyenne. En tout cas la marche ascendante en latitude de la civilisation est un fait. Elle est marquée géographiquement par la latitude des grandes villes de plus de 500.000 habitants, Thèbes, Memphis, Babylone, Ninive, Rome, Paris, etc... La marche parallèle et contemporaine de la température tempérée en est une autre également indéniable. Il est permis d'y voir une relation de cause à effet assez naturelle.

On a essayé de bien des manières différentes d'expliquer ces périodes glaciaires. Il y a les théories géologiques, déplacement du Gulf Stream, du pôle terrestre, surélévation des continents ; les théories astronomiques, variations de l'excentricité de l'orbite terrestre, de l'obliquité de l'équateur, du déplacement du périhélie et de la précession des équinoxes. Les premières ne rendent pas

compte de la périodicité du phénomène. Parmi les causes astronomiques l'influence de l'excentricité est faible et négligeable, celle de l'obliquité de l'équateur plus considérable, mais le déplacement du périhélie paraît mieux remplir toutes les conditions de température et d'humidité requises [1]. En tout cas, ce déplacement doit produire de longues saisons alternativement chaudes et froides d'une période de 21.000 ans environ, pour les dernières.

On sait que les saisons ne sont pas rigoureusement égales. Actuellement, le Soleil reste huit jours de plus dans notre hémisphère. Autrement dit, les deux saisons chaudes, le printemps et l'été, ont huit jours de plus que les saisons froides pour l'hémisphère boréal. C'est le contraire pour l'autre hémisphère, l'hémisphère austral. Il en résulte que notre hémisphère est un peu plus chaud que l'autre et ce fait est surtout sensible au voisinage des pôles. Les lignes de même température moyenne sont plus élevées en latitude dans notre hémisphère, même en dehors de l'influence du Gulf Stream.

Cette température a dû augmenter encore un peu, car il y a trois ou quatre cents ans une banquise de glace continue reliait encore l'Islande et le Groënland. Nous sommes probablemnt arrivés au maximum de chaleur et la température va décroître lentement [2].

[1] Adhémar. *Les Révolutions de la mer*, 1842, 2 édit., 1860. — Croll, *Climate an time in their geological relations* London 1875. Discusions on climate and cosmology. London 1889. Ball. Astronomical theory of the glacial period (1891). Voir Milankowitch, 2e partie, ch. 2.

[2] Les données sur les climats d'autrefois en Europe paraissent contradictoires, sur l'extention de la culture de la vigne et de

Dans 10.000 ans environ, c'est notre hiver qui sera plus long de huit jours, d'où une température plus basse. C'est l'été de l'autre hémisphère qui sera plus long, d'où là-bas une température plus élevée. Or, tous les grands océans sont situés dans l'autre hémisphère, les continents dans le nôtre. La température plus élevée aura donc pour effet de produire une vaporisation plus intense de l'eau des mers. Les vents du midi seront donc dans nos régions plus humides encore. Ils seront plus fréquents, car notre hémisphère plus froid sera un centre plus intense de condensation. Les géologues admettent qu'il suffit d'un abaissement de quelques degrés et de vents très humides, pour expliquer tous les phénomèmes caractéristiques d'une période glaciaire. Nous avons bien là tout ce qu'il faut. Mais on voit aussi que le concours de circonstances n'est pas aussi complet pour l'autre hémisphère.

On peut se rendre compte très simplement de l'influence des conditions astronomiques sur la température à la surface de la Terre, en s'appuyant sur ce fait que la température moyenne, comme la température à l'équateur et à différentes latitudes est la même que si l'atmosphère n'existait pas et si le sol se comportait comme un corps noir (V. ch. 5, n° 11). Nous pouvons à plus forte raison, calculer les variations de ces températures, comme si l'atmosphère n'existait pas.

l'olivier par exemple. Les uns concluent à une température plus élevée, les autres à une température plus basse. En réalité, les hivers étaient plus froids et les étés plus chauds, ce qui s'accorde parfaitement avec tous les faits et avec la théorie.

L'énergie calorifique reçue à un instant quelconque $t$ de la journée, par unité de surface, sera

$$(29) \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{I}{r^2}\cos z =$$

$$\frac{I}{r^2}(\sin\lambda\sin\delta + \cos\lambda\cos\delta\cos h), \qquad h = \frac{2\pi}{t_1}t.$$

$z$ est la distance zénithale du Soleil à l'instant $t$, $r$ sa distance à la Terre, $h$ son angle horaire, $\delta$ sa déclinaison, $\lambda$ la latitude du lieu. L'*insolation diurne* s'obtiendra en intégrant de o à H, $t_1$ étant la longueur du jour.

$$(30) \qquad w = \frac{I}{\pi}t_1(\mathrm{H}\sin\lambda\sin\delta + \cos\lambda\cos\delta\sin\mathrm{H})$$

où

$$(31) \qquad \cos\mathrm{H} = -\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\delta, \qquad \sin\delta = \sin\omega\sin l.$$

$\omega$ est l'obliquité de l'équateur, $l$ la longitude du Soleil.

L'*insolation moyenne* sur le parallèle de latitude $\lambda$, pour la longitude $l$ du Soleil, ou à l'époque $t$ de l'année, s'obtiendra en divisant $w$ par $t_1$. En développant les termes en H en fonction de $\delta$ et les termes en $\delta$ en fonction de $l$, d'après (31) cette insolation moyenne pourra s'écrire

$$(32) \qquad \frac{d\mathrm{W}}{dt} = \frac{I}{\pi}\cos\lambda$$

$$(a + \tfrac{1}{2}\pi\sin\omega\operatorname{tg}\lambda\sin l + a_2\cos 2l + a_4\cos 4l + \ldots$$

$$a = (1 - x^2 - \frac{3}{4}x^4) + x^2(1 + \frac{3}{2}x^2)\operatorname{tg}^2\lambda + \tfrac{1}{4}x^4\operatorname{tg}^4\lambda\ldots,$$

$$x = \tfrac{1}{2}\sin\omega.$$

Les termes au delà de $\cos 4l$ et $x^4$ ou $\sin^4\omega$ sont né-

gligeables. Actuellement on a

$$\omega = 23^0 27' 30'' \qquad \sin\omega = 0{,}3981$$
$$a = 0{,}9591 + 0{,}0420\ \mathrm{tg}^2\lambda + 0{,}00039\ \mathrm{tg}^4\lambda \ldots .$$

En remplaçant $dt$ par $dl$ au moyen de la constante des aires et en intégrant de o à $\frac{\pi}{2}$ on aura l'énergie calorifique totale reçue pendant une saison à la latitude $\lambda$

$$(33) \qquad W = \frac{Il_1}{4\pi a^2\sqrt{1-e^2}}\cos\lambda(a \pm \mathrm{tg}\,\lambda \sin\omega),$$
$$\frac{r^2 dl}{dt} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{t_1}$$

$t_1$ représente la longueur de l'année. Le signe + se rapporte aux saisons chaudes, le signe — aux saisons froides. On aurait une formule un peu plus compliquée pour la zone arctique. L'*insolation annuelle* s'obtiendrait en supprimant le terme en sin $\omega$ dans (33) et en multipliant par 4.

La relation de la constante des aires permet de déterminer la longueur des saisons en fonction de l'excentricité $e$ et de la longitude du périhélie P, on a

$$(34) \qquad t = \frac{1}{4}t_1\left(1 \pm \frac{4e}{\pi}\sin \mathrm{P}\right).$$

L'insolation moyenne $W_m$ pendant une saison s'obtiendra en divisant W par $t$. C'est de cette quantité que dépend la température moyenne d'une saison chaude ou froide à la latitude $\lambda$. Or W ne dépend que de l'obliquité de l'équateur $\omega$ et $t$ dépend seulement de $e$ sin P. D'après la loi de Stefan la 4e puissance de la température moyenne sera proportionnelle à $W_m$. Si on consi-

dère une autre période où $\omega$ et P et $e$ ne sont plus les mêmes, on aura, pour la variation de la température moyenne d'une saison,

$$(35)\ 4\frac{dT}{T} = \frac{dW_m}{W_m} = \frac{1}{W}\frac{dW}{d\omega}d\omega - \frac{dt}{t}, \qquad \frac{dt}{t} = \frac{4e}{\pi}\sin P.$$

L'obliquité $\omega$ peut varier de 1 degré par rapport à sa valeur actuelle. La variation qui en résulte pour $W_m$ est variable en latitude. Elle est très faible et négligeable jusqu'à la latitude de 45 degrés où elle atteint 1 %. Au pôle elle serait de 4 %. La variation moyenne, en tenant compte des surfaces, serait de 0,8 %, ce qui correspondrait à une variation de moins de un degré, entre les températures des saisons chaudes et froides. Ce serait insensible. La variation de l'obliquité de l'écliptique ne paraît pas pouvoir expliquer les périodes glaciaires.

La variation due au déplacement du périhélie et à l'excentricité serait la même pour toute latitude du même hémisphère. Il y a 11.000 ans la variation était de 4 %. L'écart de température entre l'été et l'hiver atteignait 6° 7 de plus qu'actuellement. Il y a 35.000 ans 6°2. Il y a 60.000 ans 6°7, et 9°8 il y a 81.000 ans. Si on remonte plus haut le Soleil plus chaud donnait une température de 5 degrés plus élevée qu'actuellement qui rendait impossible la glaciation. Nous avons bien là les 4 périodes glaciaires.

MM. Depéret, Gignoux, etc., ont signalé la coïncidence des 4 périodes glaciaires, avec 4 niveaux successifs du fond des vallées et des rivages de la mer formant des terrasses successives à environ 20 m., 35 m., 60 m. et 100 m. du niveau actuel. On peut expliquer et faire concorder ces différents phénomènes par le fait que le refroi-

dissement du Soleil et de la surface de la Terre produit une absorption de l'eau par le sol et une diminution du niveau des mers (*C. R.*, t. 165, p. 629, 1917). Cet abaissement était arrêté pendant la période chaude, ou de réchauffement, il se produisait une terrasse de remblaiement pendant laquelle les débris d'érosion s'accumulaient. Puis le niveau de la mer s'abaissait avec la période froide, les vallées se creusaient et les glaciers étendaient leurs moraines sur la partie la plus basse, jusqu'à ce que le réchauffement arrête le creusement.

On peut dire que tous les auteurs qui ont étudié cette question, Adhémar, Croll, Ball, ont rattaché plus ou moins directement les périodes glaciaires aux variations du périhélie. Les phénomènes astronomiques permettent ainsi d'expliquer les phénomènes géologiques et de donner une idée du temps de l'évolution. Certains qui veulent faire remonter l'homme très loin, trouvent ce temps beaucoup trop court. M. Depéret, un spécialiste en la matière, pense au contraire qu'on a voulu faire remonter l'homme beaucoup trop loin et que, loin d'être tertiaire, plus de la moitié du quaternaire se serait écoulé avant l'apparition de l'homme [1].

[1] La classification des temps quaternaires. *Rev. gén. Sc.* p. 135 (1923).

## CHAPITRE VIII

### ÉTUDE DE LA CONDENSATION ET DE LA FORMATION DES ASTRES DANS UN MILIEU INDÉFINI

Les astres n'ont pas existé de toute éternité dans l'état où nous les voyons. Ils ont subi une évolution, qui se continue, que la Géologie nous retrace pour la Terre. Cette évolution a été précédée d'une période de formation, où les astres n'étaient pas encore nés. La matière qui les compose était dispersée dans l'espace, avant d'être agglomérée en Soleils et en planètes. Le jeu de l'attraction universelle a condensé ces masses. On peut mettre le problème en équation et déterminer les conditions de cette formation. On peut montrer en particulier comment le temps de formation d'une étoile est étroitement lié à la densité du milieu. Ce sont ces questions et ces travaux que nous allons passer en revue dans ce chapitre.

1. **Les données du problème.** — Nous devons remonter jusqu'au moment où toute la matière des astres était dispersée dans tout l'espace. Mais la matière elle-même n'est pas éternelle. On a comparé l'atome, avec son noyau et ses électrons, à un systéme solaire infiniment petit. Il fut un temps où l'atome lui-même n'existait pas, où la matière n'existait pas, où la gravitation n'existait pas. L'impondérable seul existait alors.

Il fut ensuite un temps, où les atomes commencèrent à se former, par la condensation et l'arrangement de leurs

éléments. L'attraction apparut avec eux. La matière était née. De ce jour, pas avant, a commencé la formation des mondes.

Nous commençons à savoir à peu près ce que sont les atomes, de quels éléments impondérables la matière pondérable est formée. Nous ne savons ni où, ni comment, ni quand, ils se sont formés.

Ils ont pu se former plus vite et plus tôt dans telle région. Alors la formation des étoiles et des mondes a commencé plus tôt et plus vite dans cette région, que dans les régions voisines. Cette formation n'a pas dû être brutale et instantanée. Elle dépendait sans doute de l'évolution antérieure des éléments des atomes, et cette évolution elle-même devait dépendre de celle des éléments de ces éléments. Cette évolution a pu être plus rapide ici et plus lente ailleurs. Nous n'en savons rien, nous n'avons actuellement aucun moyen de le savoir.

Ceci d'ailleurs importe peu pour le problème qui se pose. Si la matière et la gravitation ont apparu d'abord dans une région délimitée, tout s'est passé, comme si cette région avait été isolée, car les éléments de cette région seule étaient soumis à l'attraction.

Si la matière et la gravitation ont apparu partout à la fois, ce sera le problème de la formation dans un milieu illimité. Mais là encore la gravitation sera partout limitée, même dans un espace sans limite, rempli de matière à l'infini. Car l'attraction n'étant pas éternelle, mais étant née dans le temps, avec l'atome, son action n'a pu rayonner autour de cet atome que dans un rayon limité. De plus cette action décroît en raison inverse du carré de la distance. Mathématiquement elle ne serait jamais nulle, physiquement elle le devient à une certaine distance, à

partir de laquelle elle devient impuissante à ébranler une molécule [1].

Même si l'Univers est infini en tout sens, l'attraction dans une direction quelconque reste finie. La résultante des attractions de toutes les masses en un point, qui serait indéterminée mathématiquement, reste pratiquement parfaitement déterminée. Le problème a un sens.

Si nous regardons la matière comme uniformément répartie, l'attraction sera sensiblement égale dans tous les sens sur chaque molécule. Il y aura équilibre, mais l'équilibre est instable. On voit facilement que, si l'homogénéité n'est pas rigoureusement mathématique, tout centre d'attraction va attirer les molécules voisines et tendre à augmenter indéfiniment sa masse. Il y aura donc nécessairement, dans un tel milieu, formation de masses plus ou moins considérables, qui constitueront les astres et les systèmes stellaires.

Si au contraire le milieu homogène indéfini était formé d'éléments répulsifs, et non attractifs, la répartition homogène serait stable. Si dans une région les éléments étaient plus denses, ils exerçaient les uns sur les autres une répulsion plus considérable et refoulaient les éléments voisins jusqu'à l'égalisation des forces, c'est-à-dire jusqu'à l'égalisation des densités partout et la réalisation de l'homogénéité. Il semble que l'éther, milieu où évolue la matière et qui transmet ses actions, est un milieu de cette sorte, milieu répulsif à équilibre stable.

Puisque la matière et la gravitation sont nées de l'électricité, à un certain moment, nous ne pouvons pas con-

[1] Voir A. Véronnet *Notre Univers est-il fini ou infini ?* (*Rev. gen. des Sc*). p. 568 (1923).

sidérer notre Univers matériel, astronomique, comme infini dans le temps pas plus que dans l'espace. Ce serait donc une idée fausse de vouloir accumuler les millions et les milliards d'années pour essayer de nous rapprocher de l'origine, essayer de combler ainsi le fossé, qui nous sépare du commencement. S'il n'y avait pas de commencement ce serait d'ailleurs illusoire et enfantin de vouloir nous en rapprocher. Mieux vaut une estimation sérieuse qu'une autre, qui paraîtrait nous reporter beaucoup plus loin, mais qui nous éloignerait du présent, sans nous rapprocher du commencement.

Ce serait une idée fausse, et qui a faussé bien des conceptions astronomiques, de croire que le monde ayant toujours existé, l'ensemble doit avoir atteint un certain état d'équilibre permanent, que les étoiles doivent se renouveler et renaître, etc. Que de problèmes ont été ainsi résolus par des idées *a priori* et antiscientifiques, par ceux là même qui reprochaient à d'autres d'admettre un commencement. Ce sont les créationnistes qui avaient raison. Le monde astronomique a eu un commencement dans le temps, comme il est pratiquement limité dans l'espace.

2. **Etat de la nébuleuse primitive. Le problème cosmogonique restreint et le problème général.** — Nous pouvons nous rendre compte de l'état de dispersion de la matière primitive et de ses propriétés. M. Faye a montré combien faible devait être sa densité et plusieurs auteurs ont analysé les propriétés mécaniques et physiques d'un tel milieu.

L'étoile la plus rapprochée du Soleil est à 200.000 fois la distance Terre Soleil, environ un parsec. On peut admettre que la distance moyenne des étoiles n'a pas

beaucoup varié depuis l'origine. La condensation l'a plutôt diminuée. Nous pouvons estimer que le rayon d'action minimum du système solaire était de 100.000 unités astronomiques. Il sera commode en tout cas de prendre ce rayon comme base dans les calculs, quitte à voir ensuite la modification des résultats, en multipliant cette longueur par 2, par 3, ou par un nombre quelconque.

On estime que les 6000 étoiles les plus rapprochées du Soleil sont contenues dans un rayon de 30 parsecs. Le rayon moyen correspondant à chacune serait alors de $30 : \sqrt[3]{6\,000} = 1{,}65$ parsec, ou 360.000 unités astronomiques.

Ce serait un nombre 3,6 fois plus grand que le précédent. On verrait également que les étoiles les plus rapprochées autour du Soleil, dans les différentes directions, sont à une distance moyenne de 600.000 fois celle du Soleil à la Terre. Le rayon d'action moyen serait plutôt voisin de 300.000 [1].

Prenons le premier nombre de 100.000 soit $1{,}5 \times 10^{18}$ centimètres. La masse du Soleil est $2 \times 10^{33}$ grammes La densité de la nébuleuse, par rapport à l'eau, est alors $1{,}4 \times 10^{-22}$, et $10^{-19}$ par rapport à l'air. Elle serait 10 milliards de milliards de fois plus faible que celle de l'air

[1] Les distances réciproques des étoiles ont certainement varié depuis l'origine. En tout cas les données et les conditions actuelles permettent une première approximation. Nous verrons d'ailleurs que l'action réciproque des étoiles n'a pu agir, pour modifier leurs distances qu'*après* la formation de ces étoiles, tout comme l'attraction des atomes n'a pu agir qu'après leur formation. Cette action n'est sensible que sur les formations plus avancées, comme les amas stellaires. On peut dire que pratiquement, par rapport à l'ensemble, *les étoiles sont encore en place* ou peu éloignées de leurs positions primitives.

normal, 10.000 milliards de fois plus faible que la matière radiante des ampoules de Crookes, où naissent les rayons X. Le nombre de molécules contenu dans le volume moléculaire, ou dans 2 grammes d'hydrogène, est de $6,85 \times 10^{23}$. Le volume occupé par les 2 grammes d'hydrogène serait ici de $1,43 \times 10^{22}$ centimètres. Nous aurions environ 47 molécules par centimètre cube, si la masse primitive était de l'hydrogène. Ce nombre serait à diviser par le poids atomique. Pour des molécules de fer, il n'y en aurait qu'une à peine par $cm^3$.

La masse contenue dans un cylindre de 1 $cm^2$ de section et ayant pour longueur le diamètre de la nébuleuse serait

$$m = 2R.D = 1,4 \times 10^{-22} \times 3 \times 10^{18}$$
$$= 4,2 \times 10^{-4}\ gr = 0,4\ mg,$$

soit 4 dixièmes de milligramme. Or 1 $cm^3$ d'air pèse 1,3 mg. Cette masse correspond à une couche d'air d'épaisseur égale à 3 mm.

La traversée de notre immense nébuleuse solaire, par un corps quelconque, équivaudrait donc à la traversée d'une épaisseur de 3 millimètres d'air. La résistance serait absolument négligeable pour n'importe quel corps, et l'effet produit nul. On voit à quel point il est nécessaire de définir les conditions d'une nébuleuse si on veut en étudier les effets au point de vue cosmogonique.

Le parcours moyen d'une molécule dans une masse de gaz, à la température et pression normales, est $10^{-5}$ cm. pour tous les gaz. Cela représente la 30.000e partie de notre épaisseur de 3 mm., c'est-à-dire 7 fois la distance de la Terre au Soleil, dans la nébuleuse. D'ailleurs le libre parcours varie en raison inverse de la

densité et en divisant par la densité $10^{-13}$ par rapport à l'air on trouve bien $10^{14}$ centimètres, c'est-à-dire 7 fois la distance du Soleil à la Terre. Nos molécules parcourraient cette distance, ou un milliard de kilomètres, avant de se rencontrer. La pression d'un gaz étant le résultat des chocs entre molécules, il n'y aurait plus aucune pression. Nous n'aurions pas un gaz, mais des molécules ou corpuscules *libres*, de la matière ultra radiante.

Si la nébuleuse était élevée à une certaine température, elle rayonnerait seulement comme un couche d'air de 3 mm. d'épaisseur. Son rayonnement par unité de surface serait insensible.

Mais la perte par rayonnement des couches centrales serait aussi rapide que celle des couches superficielles, n'étant protégées que par une couche équivalent à 1,5 mm. d'air. La masse entière tomberait presque instantanément au zéro absolu. Une telle matière nébuleuse, aussi dispersée, ne peut-être qu'*absolument froide*. Elle n'aura aucune propriété physique de température et pression, mais seulement des propriétés mécaniques.

Par conséquent on ne peut absolument pas se représenter la matière, à l'origine, comme étant à l'état gazeux, comme un gaz possédant une force élastique pouvant le maintenir dans un état d'équilibre. On pourra étudier les conditions d'équilibre correspondant à un certain état des vitesses, mais ces vitesses ne correspondront à aucune température.

Si nous considérons une masse nébuleuse isolée, très étendue, cela n'a plus aucun sens de dire qu'elle va se contracter et se réchauffer en rayonnant, en suivant le cycle de Lochyer et Russel. Il faut attendre qu'elle se soit contractée suffisamment pour acquérir les propriétés

des gaz. Cela n'aurait lieu pour la masse solaire que pour un rayon égal tout au plus à 10 fois la distance du Soleil. En attendant, les molécules isolées se seraient probablement agglomérées en particules, et en météorites. Ce ne serait toujours pas un gaz. C'est le problème de l'équilibre, ou de l'évolution, des amas de particules, qui se poserait ici, analogue à celui des amas stellaires.

Peut-on considérer cette nébuleuse indéfinie comme déjà différentiée ? C'est ce qu'ont fait la plupart des auteurs qui se sont occupé de l'évolution et de la formation des mondes depuis Laplace. Pour simplifier le problème, ils ont supposé que le milieu primitif était fragmenté, ou s'était *d'abord* fragmenté, en nébuleuses particulières et isolées, dont chacune avait formé ensuite une étoile et son cortège de planètes. On n'a étudié ainsi que l'évolution d'une nébuleuse isolée, c'est-à-dire le *problème cosmogonique restreint*. Les auteurs ont donné d'ailleurs aux différentes parties, des mouvements de translation arbitraires pour les isoler, et des mouvements de rotation également arbitraires, pour arriver à faire tourner les planètes.

*Le problème général* et scientifique, ne doit admettre aucune hypothèse particulière sur la distribution de la matière et des vitesses, et les expliquer toutes.

Quelque soit la distribution de la matière, nous verrons qu'il y a toujours des irrégularités et par conséquent des centres d'attraction. La matière s'est condensée d'abord autour de ces centres. *Les étoiles se sont formées ainsi par l'intérieur* et par le centre, au lieu de se former par la périphérie, en s'isolant des fragments voisins. Les résultats du calcul mécanique sont plus simples et plus féconds que les hypothèses *à priori*. Ils per-

mettent de déterminer les conditions de temps et de température des étoiles en fonction de la densité du milieu, les conditions de formation des amas de la même façon que celle des étoiles, les conditions de la formation des planètes par l'action de déviation des étoiles voisines sur les particules éloignées, les conditions de la structure générale de l'Univers et des mouvements d'ensemble, par l'attraction réciproque de toutes ses parties, l'état peu avancé de cette évolution cosmique plus voisine de l'état initial que de l'état final, etc.

3. — **Cas d'une nébuleuse isolée de densité homogène.** — Nous pouvons considérer d'abord la nébuleuse solaire, c'est-à-dire l'ensemble des particules qui ont formé le Soleil et les planètes, comme isolée dans l'espace et formant une masse sphérique homogène. L'attraction y varie alors proportionnellement à la distance au centre. Le temps de chute pour arriver au centre serait exactement le même pour toutes les particules et ne dépendrait que de la densité de la nébuleuse.

Soit $\gamma$ l'attraction à la distance $r$, $m$ la masse renfermée dans la sphère de rayon $r$, la densité étant partout $\rho$, on a

$$\gamma = f\frac{m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho f r. \qquad (1)$$

L'accélération maximum à la surface serait $10^{-10}$, ou 10 milliards de fois plus faible qu'à la distance de la Terre, où elle est de 0,6 cm. par seconde. Pour la Terre en effet, l'attraction est égale à la force centrifuge, on a

$$\gamma = \frac{v^2}{r} = \frac{(30\ \text{Km})^2}{1{,}5\ 10^8\ \text{Km}} = \frac{60}{10^7}\text{Km} = 0{,}6\ \text{cm}.$$

Chaque molécule est soumise uniquement à l'attraction de la masse contenue dans la sphère $r$. On peut considérer sa trajectoire, même rectiligne, comme une ellipse très allongée. La 3e loi de KÉPLER donne pour le temps d'une révolution complète

$$4\pi^2 a^3 = fmT^2. \tag{2}$$

Si $t$ est le temps de chute au centre, $r$ la distance, on a

$$r = 2a, \qquad T = 2t,$$

$$t^2 = \frac{\pi^2 r^3}{8fm} = \frac{3\pi}{32f\rho}. \tag{3}$$

On voit que le temps de chute est indépendant de $r$ et ne dépend que de la densité $\rho$. Il est le même pour toutes les particules.

Si on exprime les distances en rayon de l'orbite terrestre, le temps en années, la formule (2) appliquée à la Terre, $m$ étant la masse du Soleil ou de la nébuleuse solaire, donne

$$fm = 4\pi^2, \quad \text{et} \quad t^2 = \frac{r^3}{32}.$$

Pour $r = 100.000\ r_1$ on obtient 5,6 millions d'années. Notre nébuleuse se serait condensée en un peu moins de 6 millions d'années. Si le rayon primitif avait été 3 fois plus considérable, densité 27 fois plus petite, ce temps aurait été 5,7 fois plus grand, ou 29 millions d'années. La première étoile aurait rayonné, et perdu sa chaleur, depuis 23 millions d'années, quand l'autre étoile aurait commencé à briller.

Nous verrons que le temps de formation, dans une nébuleuse indéfinie, dépendra de la même façon de la den-

sité du milieu. On comprend donc comment certains systèmes stellaires, dans certaines régions, peuvent être encore à la phase nébuleuse de formation, d'autres à la phase d'étoiles brillantes, d'autres déjà éteintes.

Une nébuleuse ayant la densité de l'air et quelque fut son rayon, se contracterait en 17 heures environ.

Considérons que notre nébuleuse sphérique est plus ou moins irrégulière, ou qu'il y a, près de sa surface, un lambeau plus ou moins séparé, à une distance $dr$, la différenciation de (3) nous donne

$$2\frac{dt}{t} = 3\frac{dr}{r} \tag{4}$$

Si la distance $dr$ est seulement de 10 unités astronomiques, on aura

$$dt = \frac{3}{2}\frac{10}{10^5} 5{,}6 \times 10^6 = 840$$

Ce lambeau serait arrivé au centre, sur l'étoile, 840 ans seulement après la formation de celle-ci.

Supposons encore qu'une partie de notre nébuleuse, représentant le millième de la masse, sous l'action diverse des centres voisins, ait acquis un lent, un très lent mouvement de rotation, ou seulement de déviation, ce moment de rotation aurait été conservé dans la condensation. Ce lambeau aurait continué à tourner autour du centre, avec une vitesse accrue, sur un rayon moindre et les centres d'attraction qui s'y seraient formés auraient constitué les planètes et leurs satellites.

Si la nébuleuse primitive, au lieu d'être sphérique, était ellipsoïdale, il y aurait concentration sur chacun des plans de symétrie. Les molécules arriveraient toutes en

même temps sur chacun des plans, mais atteindraient successivement les trois plans. Il y aurait d'abord condensation suivant un disque ellipsoïdal, puis sur le grand axe de cette ellipse, finalement sur son centre.

4. **Cas d'une nébuleuse isolée dont la densité varie en raison inverse du carré de la distance.** — La densité uniforme est un cas limite. Pratiquement la densité serait plus considérable vers le centre. Considérons la loi générale

$$\rho r^n = \rho_1 r_1^n,$$

où la densité varie en raison inverse de la $n^{me}$ puissance de la distance au centre. La masse et l'attraction à la distance $r$ deviennent dans le cas particulier où $n = 2$

$$m = 4\pi\rho_1 r_1^2 r = m_1 \frac{r}{r_1} \qquad \gamma = f\frac{m_1}{r_1 r} \tag{5}$$

La masse est proportionnelle à la distance et l'attraction est inverse de $r$.

Le temps de chute devient proportionnel à la distance $r$,

$$t^2 = \frac{3\pi}{32 f\rho_1}\frac{r^2}{r_1^2}. \tag{6}$$

Le temps de chute des éléments superficiels serait le même que celui donné par la formule (3) avec le même $m$ et le même $r$. Les éléments situés à la moitié de la distance auraient atteint le centre au bout de trois millions d'années dans notre première nébuleuse. L'étoile aurait rayonné déjà depuis 6 millions d'années à la fin de sa formation. On voit comment l'état physique actuel de la réparti-

tion des températures intérieures, comme aussi la température extérieure, pourront dépendre étroitement du mode et de la vitesse de formation, suivant que cette formation aura lieu brusquement ou lentement. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

La masse est proportionnelle au rayon d'après (5), comme le temps de chute également d'après (6). La masse formée sera donc aussi proportionnelle au temps. Elle augmenterait régulièrement par an de la 6 millionième partie de la masse totale, ou de la vingtième partie de la masse de la Terre.

L'énergie dégagée par un gramme tombant sur une masse $m$ de rayon R serait

$$E = f\frac{m}{R} = f\frac{m_1}{r_1}\frac{r}{R}$$

Si la loi de densité à l'intérieur de l'astre formé est la même que celle de la nébuleuse, alors R est proportionnel à $r$. L'énergie et la température produites restent constantes. Mais comme la masse qui tombe est constante et la perte par rayonnement proportionnelle à $r^2$ la température résultante diminuera avec le rayon. Nous verrons comment la loi des températures dépendra de la loi des vitesses de formation.

5. **Milieu illimité. Surfaces d'égale densité. Surfaces limites. Délimitation des sphères d'attraction.** — Considérons maintenant la matière de toutes les étoiles dispersée dans l'espace illimité. Si nous supposons la répartition parfaitement, mathématiquement homogène, chaque molécule sera également attirée dans chaque sens

et restera immobile [1]. Cette homogénéité mathématique n'est pas physiquement réalisable pour la seule raison qu'il y a des molécules plus grosses les unes que les autres.

Nous considérons donc la *densité moyenne* de la matière primitive comme sensiblement homogène dans une immense région correspondant à quelques millions d'étoiles. Cette densité variera d'un point à l'autre autour de la valeur moyenne. Traçons alors dans l'espace les surfaces d'égale densité. Nous aurons, en les coupant par un plan, une représentation comme celle de la figure 24, où les lignes d'égale densité sont analogues aux *lignes de niveau* d'une carte géographique. Elles s'enveloppent sans se couper.

Les points $C_1$, $C_2$, $C_3$, seront des maximums de densité, entourés de lignes de densité décroissante. Les points A, A' seront des minimums de densité.

Aux surfaces d'égale densité correspondront des *surfaces équipotentielles* parfaitement définies, en considérant le potentiel dû uniquement aux différences de densité avec la moyenne. Le zéro arbitraire de potentiel étant celui qui correspond à la densité moyenne, les surfaces équi-

[1]. L'objection que dans un Univers infini l'attraction serait infinie en tout sens et par conséquent indéterminée en chaque point ne porte pas. Une action ne peut pas avoir pratiquement une valeur indéterminée bien qu'elle puisse l'être au point de vue mathématique, c'est-à-dire bien qu'on ne puisse pas la déterminer mathématiquement. De plus la gravitation suppose la formation des atomes. Elle n'existe pas de toute éternité et n'a pas pu se propager à l'infini. Chaque élément ne peut être soumis qu'à l'action des masses situées dans un rayon limité autour d'elle.

potentielles correspondront sensiblement à celles d'égale densité. On aura une représentation analogue.

En chaque point P, $P_1$, $P_2$, autour de $C_i$ par exemple, il y aura une force d'attraction, normale à la surface équipo-

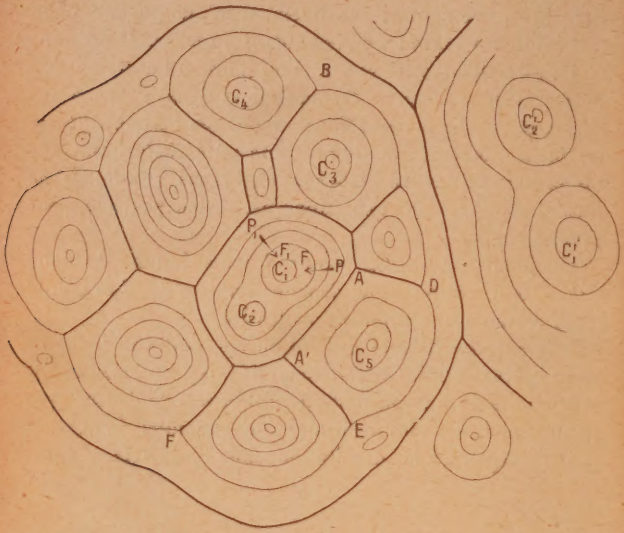


Fig. 24. — Représentation des surfaces d'égale densité et des surfaces équipotentielles, qui délimitent les zones d'attraction.

tentielle passant en ces points, et dirigée vers les potentiels croissants, ou les densités croissantes. Toutes les molécules des surfaces équipotentielles vont donc tendre à se concentrer autour du point de potentiel maximum, qui formera centre d'attraction. Les surfaces de densité mini-

mum, ou de potentiel minimum, formeront les limites de la zone d'action de ces centres. Toute la masse renfermée dans cette enveloppe finira par se concentrer à son intérieur. Il y aura autant d'étoiles que de zones d'action.

Les centres $C_1$, $C_2$ sont analogues aux points les plus bas d'une cuvette dans les cartes de relief géographique. Toutes les eaux tendent vers ces points.

Un centre secondaire $C_2$ pourra être englobé dans la même surface équipotentielle enveloppante, qu'un autre centre $C_1$. L'ensemble formera un système double.

Un nombre plus ou moins considérable de centres $C_1$, $C_2$, $C_3$... pourra être enveloppé dans une surface équipotentielle minimum B, D, E, F. Les étoiles formées se concentreront à l'intérieur de cette enveloppe pour former un amas stellaire plus ou moins considérable, à côté d'autres en $A_1$, $A_2$... etc.

A l'intérieur de la zone d'action d'un centre stellaire, on distinguerait de même une multitude de centres élémentaires, sur lesquels s'est amorcée la concentration des particules, et qui a dû fournir les premiers éléments, analogues aux météorites ou aux comètes.

On distinguerait ainsi *trois ou quatre sortes de centres* d'importance croissante. Les centres élémentaires, du premier ordre, qui ont donné les météorites. Les centres stellaires, ou du second ordre, qui ont agrégé ces météorites en étoiles. Enfin les centres supérieurs, ou du troisième ordre, qui ont agrégé les étoiles en amas. Leur action a été d'autant plus longue et plus lente qu'elle s'exerçait plus loin, de sorte que les météorites se sont formées avant les étoiles, et les amas après les étoiles, d'où *trois phases de formation successives correspondant aux trois sortes de centres de formation principaux*. Enfin une surface

minimum du quatrième ordre, qui envelopperait un ensemble d'amas constituerait une voie Lactée, système de concentration du quatrième ordre, après les météorites, les étoiles et les amas stellaires.

6. **Cas des particules en mouvement.** — Nous supposerons les particules immobiles pour simplifier. D'ailleurs le problème des origines doit s'efforcer d'expliquer tous les mouvements et l'on ne doit s'en donner aucun arbitrairement. Il faut donc partir du repos.

L'étude des comètes nous a révélé qu'aucune d'elles ne manifeste de trajectoire hyperbolique. L'énergie cinétique d'aucune d'elle n'est donc supérieure à celle que lui a communiquée l'attraction solaire. Ceci prouve que, même pour d'aussi faibles masses, l'énergie cinétique originelle, la vitesse moyenne ou du centre de gravité, a dû être très faible.

On pourrait admettre au début des mouvements en tous sens, analogues à ceux des molécules d'un gaz et dus à la formation des atomes et à l'expulsion de certains éléments comme dans les corps radioactifs. La vitesse maximum serait celle du recul d'un atome, sous l'expulsion d'un électron, avec la vitesse de la lumière. Ceci donnerait une vitesse de 7.000 kilomètres par seconde pour l'atome d'hydrogène, ce qui correspondrait à une température de 3.440 millions de degrés. Ce serait beaucoup. Mais la lenteur de la transformation du radium et la faible élévation de sa température nous montrent que la *vitesse moyenne*, correspondant à une élévation analogue de quelques degrés, serait de 190 mètres par seconde pour l'atome d'hydrogène, et cela pour une radioactivité tout à fait exceptionnelle. Si on considère une particule de un

milligramme seulement, au lieu d'un atome, la vitesse résultante serait tout à fait insignifiante.

D'ailleurs si on considère des particules en mouvement complètement décoordonné, qui se choquent comme dans la théorie cinétique, on pourra se représenter chaque particule, dans son parcours moyen entre deux chocs, comme oscillant autour d'une position moyenne. Si nous ajoutons dans le milieu un centre d'attraction, les positions moyennes de toutes les molécules environnantes subiront sous son attraction les mêmes déplacements que si elles étaient immobiles.

Il y aura donc concentration suivant les mêmes lois. Les vitesses n'interviendront qu'au moment où par leurs chocs nombreux ils introduiront une force élastisque capable de contrebalancer l'attraction. Mais à ce moment-là la concentration sera achevée [1].

7. **Action d'un seul centre d'attraction dans une nébuleuse homogène indéfinie.** — Au lieu de supposer la densité variable d'une façon quelconque il est plus simple de la supposer uniforme dans chaque sphère d'action et de considérer des centres d'attraction réduits à des points. Le problème reste le même. Nous allons étudier d'abord l'action d'un seul centre.

Dans notre milieu homogène et en équilibre, où toutes

[1]. Le cas étudié par M. Poincaré (*Hypothèses cosmogoniques*, p 93, 95), à propos de l'hypothèse du Ligondès n'est pas le même que celui traité ici. Dans ce cas les agglomérations fortuites tendraient à disparaître mais le calcul suppose que les chocs sont parfaitement élastiques et le milieu parfaitement homogène. La quantité U ne peut pas varier dans le même sens ni tendre vers une valeur limite, ce qui exclut d'avance toute condensation permanente.

les particules sont d'abord supposées immobiles, nous ajoutons une masse additionnelle quelconque $m$ en un point O, figure 25. Cette masse forme centre d'attraction pour toutes les molécules. Les surfaces équipotentielles, relatives à cette masse, sont des sphères concentriques de centre O. Toutes les molécules situées sur une des sphères équipotentielles sont attirées également et restent sur la même sphère. Toutes les molécules se rapprochent donc du centre O, suivant des sphères concentriques. Le mi-

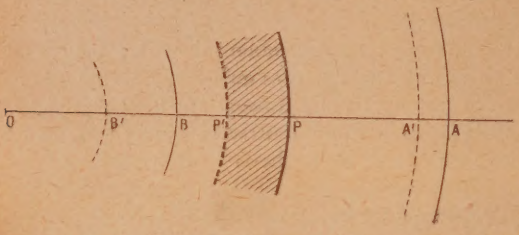


Fig. 25. — Condensation des couches concentriques situées à différentes distances.

lieu reste symétrique autour du point O. La masse $m$ subit une action égale dans tous les sens et reste elle-même immobile. Les molécules du milieu, ainsi attirées, vont donc successivement tomber sur le centre en couches concentriques. On peut déterminer le temps, la vitesse de la chute, la variation de densité et la température de formation de chacune de ces couches, étant données la masse $m$ et la densité $\rho$ du milieu.

Une molécule, située d'abord en un point P, à la distance $r = OP$ de O, arrivera au bout du temps $t$ en P', à la distance $x = OP'$ de O, ainsi que tous les points de

la sphère $r$. L'attraction en P était $\frac{d^2r}{dt^2} = -f\frac{m}{r^2}$. Quelle sera l'attraction en P' ?

L'attraction de toutes les molécules primitivement intérieures à la sphère OP reste la même au point P'. En effet, elles se sont toutes déplacées suivant des sphères concentriques à O et leur attraction reste la même que si toute leur masse était concentrée au point O.

Il en est de même pour toutes les molécules primitivement extérieures à la sphère OP, et qui restent extérieures à la sphère OP'. En effet, comme elles se déplacent suivant des sphères concentriques, le potentiel relatif à ces couches sphériques, ou l'accroissement de potentiel, reste constant à leur intérieur et l'attraction correspondante y est nulle à chaque instant. Enfin l'attraction de la masse $m'$ des molécules comprises primitivement entre les deux sphères OP et OP', et devenues intérieures à la sphère OP', s'ajoute à celle de $m$ pour exercer leur action en P'.

L'attraction subie par une molécule primitivement en P, et arrivée en P', est donc, en appelant $\rho$ la densité du milieu,

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{m}{x^2} - f\frac{m'}{x^2} = -f\frac{m}{x^2} - \frac{4}{3}\pi f\rho\frac{r^3 - x^3}{x^2}.$$

Nous allons tout d'abord calculer le temps de chute en première approximation, en introduisant quelques simplifications, pour éviter des intégrales elliptiques qui rendraient difficiles les calculs numériques et pratiques.

Si la masse additionnelle $m$ est assez faible, son attraction n'est sensible qu'au voisinage de P ou de $r$. On

peut, dans le premier terme écrire $x = r$, et dans le second terme

$$(2) \qquad \frac{r^3 - x^3}{3x^2} = (r - x)\frac{r^2 - rx + x^2}{3x^2}.$$

Ce dernier terme est d'abord proportionnel à $r - x$ pour $x$ voisin de $r$ et P' voisin de P. C'est la période où l'attraction est la plus faible, le temps le plus long. On aura une valeur assez approchée en faisant égal à 1 le second terme de (2). La formule (1) peut s'écrire alors

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{m}{r^2} - 4\pi f\rho(r - x).$$

Posons

$$(4) \qquad \alpha^2 = 4\pi f\rho \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \frac{m}{4\pi\rho r^3} = \frac{1}{3}\frac{m}{M},$$

M étant la masse de la nébuleuse contenue d'abord dans la sphère de rayon OP $= r$ et qui composera la masse totale condensée, quand les molécules situées en P seront arrivées en O. Comme cette masse M sera supposée très considérable par rapport à la masse additionnelle primitive $m$ le nombre ε sera très petit.

On a

$$(5) \qquad \frac{d^2x}{\alpha^2 r dt^2} = -(1 + \varepsilon) + \frac{x}{r}$$

Multiplions par $2dx$ et intégrons de $r$ à $x$, on a

$$(6) \qquad \frac{1}{\alpha^2 r}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -2(1 + \varepsilon)(x - r) + \frac{1}{r}(x^2 - r^2).$$

La formule (1) donnerait d'ailleurs directement la formule exacte de la vitesse.

Divisons par $r$ et posons $1 - \frac{x}{r} = z$. Les limites d'intégration deviennent o et $z$. On aura

$$\left(\frac{dz}{\alpha dt}\right)^2 = 2\varepsilon z + z^2 = (z+\varepsilon)^2 - \varepsilon^2$$

$$\alpha t = \int_o^z \frac{dz}{\sqrt{(z+\varepsilon)^2 - \varepsilon^2}}. \tag{7}$$

L'intégration est immédiate. La limite o donne o, il vient

$$\alpha t = \operatorname{Log}\left(3\frac{M}{m}z + 1 + \sqrt{(3\frac{M}{m}z+1)^2 - 1}\right). \tag{8}$$

Or $z$ part de o et tend vers 1, comme la valeur de $m$ est supposée très petite par rapport à M on pourra négliger 1 devant le terme en $z$ dès que $z$ aura une valeur appréciable, c'est-à-dire dès que P′ sera distinct de P et $x$ de $r$.

On pourra écrire pour le temps de chute $t$ de P en P′,

$$\alpha t = \operatorname{Log} 2\left(3\frac{M}{m}z + 1\right) \tag{9}$$

ou encore

$$\alpha t = \operatorname{Log} 6\frac{M}{m}z = \operatorname{Log}\frac{8\pi\rho r^3}{m}\left(1 - \frac{x}{r}\right). \tag{10}$$

Le temps de chute totale de P en O c'est-à-dire pour $x = o$, sera

$$\alpha t = \operatorname{Log} 6\frac{M}{m} = \operatorname{Log}\frac{8\pi\rho r^3}{m}. \tag{11}$$

Les calculs numériques montrent que ces trois formules (8) (9) (10) donnent les mêmes résultats, à 0,01

prés dès que la masse condensée M est égale à dix fois la masse supplémentaire $m$.

Le calcul complet donne pour $\alpha t$ les mêmes formules auxquelles il suffit d'ajouter dans le second membre la constante $-\operatorname{Log}\frac{1}{6}(2+\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$.

On obtient finalement,

$$(12)\quad t\sqrt{4\pi f\rho} = \operatorname{Log}\frac{36}{(2+\sqrt{3})^{\sqrt{3}}}\frac{M}{m} = \operatorname{Log} 3{,}6785\frac{M}{m}.$$

$$(13)\quad \frac{M}{m} = \frac{4}{3}\frac{\pi\rho r^3}{m} = \frac{(2+\sqrt{3})^{\sqrt{3}}}{36}e^{\sqrt{\pi f\rho}} = 0{,}27186\, e^{\alpha t}.$$

Le coefficient du second membre est très voisin de $\frac{1}{10}e = 0{,}27183$. On peut écrire avec une approximation de 0,000 01

$$(13)'\qquad \frac{M}{m} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{r^3}{m} = \frac{1}{10}e^{\alpha t+1}.$$

où M est la masse condensée par la masse additionnelle $m$ au bout du temps $t$.

8. **Lois générales déduites de la formule du temps de chute.** — La formule (12) montre que si l'on considère des masses M formées dans un milieu de même densité, pendant le même temps $t$ le rapport $\frac{M}{m}$ reste constant avec $\alpha t$. *Pendant tout le temps de leur formation, les masses formées M restent proportionnelles aux masses attractives primitives m*, supposées assez éloignées pour ne pas gêner mutuellement leur action.

Si on considère des milieux de densités différentes on aura

$$t\sqrt{\rho} = C^{te} \tag{14}$$

pour la formation de la même masse M par la même masse *m*. *Le temps de formation des mêmes astres sera en raison inverse de la racine carrée de la densité du milieu.* Dans un milieu de densité 4 fois plus grande, un astre aura mis deux fois moins de temps que le Soleil pour se former. Il aura rayonné depuis sa formation, pendant beaucoup plus de temps, et sera refroidi davantage.

En différentiant (12) par rapport à M et à *t* on a

$$dM = \alpha M dt, \qquad \frac{dM}{dt} = M\sqrt{4\pi f\rho} \tag{15}$$

*La vitesse de formation ou d'accroissement d'un astre est proportionnelle à la masse déjà concentrée M et à la racine carrée de la densité du milieu.* Elle est indépendante de la masse attractive primitive *m*, au moins dès que la masse M l'emporte sur *m* et que l'on peut substituer la formule simplifiée (10) à (8). Ainsi le rayon de l'astre en formation mettra le même temps pour croître de 0,1 à 0,2, *quel que soit le centre d'attraction primitif* qui aura servi à le former.

La formule (13) nous indique immédiatement *encore que dans un milieu quelconque, la masse formée M croit, en progression géométrique quand le temps croit en progression arithmétique.*

La formule (12) donnerait de même, si on considère une masse M qui soit *n* fois plus grande que $M_1$, ou une masse *m* qui soit *n* fois plus petite que $m_1$,

$$\alpha(t - t_1) = \text{Log}\,\frac{M}{M_1}\frac{m_1}{m} = \text{Log}\,n. \tag{16}$$

Pour le même milieu et la même masse additionnelle $m$, l'accroissement du temps de formation, pour une masse $n$ fois plus grande, ne dépend que de Log $n$. De même pour la formation de la masse M sous l'action d'une masse $n$ fois plus petite, l'accroissement de temps ne dépend que de Log $n$.

*Dans des milieux de densité différente*, les logarithmes des masses formées pendant le temps $t = t_1$, et dans les mêmes conditions, c'est-à-dire avec le même $m$, sont proportionnelles à $\sqrt{\rho}$, formule (11).

La forme (13)' donne

$$\frac{M}{M_1} = e^{(\alpha - \alpha_1)t} \qquad (17)$$

Pour $\rho = 4\rho_1$ c'est-à-dire pour un milieu 4 fois plus dense que le premier, on a $\alpha = 2\alpha_1$ et

$$\frac{M}{M_1} = e^{\alpha_1 t} = \frac{10 M_1}{e\, m} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{m} = \frac{10}{e}\left(\frac{M_1}{m}\right)^2 \qquad (18)$$

Si la masse formée M est de l'ordre de 100.000 $m$, celle de $M_1$ sera 165 $m$ seulement, c'est-à-dire de l'ordre d'*une grosse planète* pour $m$ égale à la masse de la Terre. Dans une nébuleuse dont la densité aurait été seulement 4 fois plus faible que celle où s'est formé le Soleil, et les étoiles voisines, les masses concentrées dans le même temps auraient été beaucoup plus faibles que celle du Soleil et d'autant plus que celui-ci aurait mis plus de temps pour se former. On pourrait avoir des étoiles qui sont encore en formation, dans des régions voisines de celles du Soleil, ou des étoiles formées depuis beaucoup plus longtemps que notre Soleil.

9. **Calculs pratiques et numériques avec différentes valeurs des masses.** — Si nous supposons que le centre d'attraction primitif avait une masse $m$ égale à celle de la Terre, on obtient pour le Soleil

$$M = M_1 = 334.000m \quad \text{et} \quad t = 40{,}74 \times 10^6 t_1.$$

Le temps mis pour la formation du Soleil aurait été de 41 millions d'années, $t_1$ étant l'année.

Si nous supposons une autre masse additionnelle de 1 g. seulement, la masse de la Terre étant $6 \times 10^{27}$ gr. nous avons

$$M = M_1 = 2 \times 10^{33} m, \qquad t = 226{,}6 \times 10^6 t_1.$$

Il aurait fallu 227 millions d'années à cette masse de 1 g. pour concentrer une masse égale à celle du Soleil.

Enfin si nous supposons seulement une masse additionnelle minimum, celle d'une molécule d'hydrogène, nous avons $6{,}84 \times 10^{23}$ molécules dans le volume moléculaire ou 2 g. d'hydrogène.

Nous aurons

$$M = 2 \times 10^{33} \times 3{,}42 \times 10.^{23} m. \qquad t = 384 \times 10^6 t_1$$

Si la nébuleuse primitive avait été rigoureusement, *mathématiquement homogène*, il aurait suffi de la présence *d'une molécule d'hydrogène en plus*, en un point quelconque, pour détruire tout l'équilibre et *concentrer une masse égale à celle du Soleil en 384 millions d'années seulement*[1].

[1]. En supposant un électron seulement, avec une masse 1680 fois plus petite qu'une molécule d'hydrogène on obtient 408 millions d'années, limite maximum. On ne peut pas parler de centaines de millions d'années, même pour la formation astronomique du monde, encore moins, semble-t-il, pour la formation géologique.

On voit à quel point la nébuleuse primitive, formée de molécules attractives aurait été instable. Il aurait suffi de quelques molécules de plus, à la place où se trouve chacune des étoiles, pour concentrer entièrement la matière de tout l'espace en quelques centaines de millions d'années et former toutes nos étoiles à l'état de Soleils lumineux et chauds.

Au lieu de supposer une masse attractive additionnelle $m$ on peut supposer simplement que la densité de la nébuleuse est plus forte autour du point qui devient centre d'attraction.

Ainsi en supposant que la densité de la nébuleuse qui formera le Soleil soit seulement de 0.003 plus forte, dans une sphère d'un rayon égal au dixième de celui de la sphère qui doit former le Soleil, nous obtenons ainsi une masse complémentaire égale à $3 \times 10^{-6}$ de celle du Soleil, c'est-à-dire égale à la masse de la Terre. Il suffirait de même d'une densité de trois unités en plus, ou 4 fois plus grande, dans une sphère d'un rayon égal au centième du rayon de la sphère totale, pour produire le même résultat.

On voit comment les très légères variations de la densité constituent des centres d'attraction et de formation. Il suffit de variations de densité de l'ordre du millième, dans des régions qui sont également de l'ordre du millième du volume, pour obtenir une condensation complète, en supposant plusieurs centres, en quelques millions d'années.

En prenant des masses additionnelles $m$ de plus en plus petites, la masse de la Terre étant prise pour unité, on obtient d'ailleurs les tableaux suivants,

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m =$ | 1 | $10^{-3}$ | $10^{-6}$ | $10^{-9}$ | $10^{-12}$ | $10^{-18}$ | $10^{-24}$ | $10^{-30}$ | $10^{-36}$ |
| $t =$ | 41 | 61 | 81 | 101 | 121 | 160 | 200 | 240 | 280 |

Le temps de formation de la masse du Soleil est exprimé en millions d'années. Il augmente environ de 20 millions d'années chaque fois que l'on prend une masse attractive 1.000 fois plus petite.

10. **Temps de formation des différentes couches intérieures. Il est indépendant de la masse primitive sauf pour le centre.** — On peut calculer de même le temps de formation des *différentes couches* successives du Soleil de dixième en dixième du rayon, $r_1$ désignant le rayon actuel du Soleil. Nous trouvons dans le cas d'une masse attractive $m$ égale à celle de la Terre,

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r : r_1 =$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| $M : M_1 =$ | 0,001 | 0,008 | 0,027 | 0,064 | 0,125 | 0,216 | 0,343 | 0,512 | 0,729 | 1,0 |
| $t =$ | 20,7 | 26,7 | 30,2 | 32,7 | 34,6 | 36,3 | 37,6 | 38,7 | 39,7 | 40,7 |
| $\delta t =$ | 20,7 | 6,0 | 3,5 | 2,5 | 1,9 | 1,7 | 1,3 | 1,1 | 1,0 | 1,0 |

La seconde ligne indique la masse formée M correspondant au rayon $r$, la masse du Soleil étant prise pour unité. La troisième ligne indique le temps de formation de chacune des couches de un dixième de rayon. C'est la différence des deux nombres consécutifs de la ligne précédente.

Il aurait fallu 21 millions d'années (20.71) pour former une masse atteignant le 0,1 du rayon du Soleil, le millième de sa masse, environ la masse de Jupiter, et 20 millions d'années, seulement le double, pour former les 999 autres millièmes. Il aurait fallu seulement le tiers de ce temps soit 6,7 millions d'années pour former les derniers 9 dixièmes de la masse, ou 6 millions d'années pour former la masse au delà de la moitié du rayon. Il aurait fallu 13,3 millions d'années pour former les 99 derniers centièmes de la masse. La formation de la

dernière moitié de la masse, $r = 0,8$ n'a demandé que deux millions d'années.

Si on prend pour masse additionnelle 1 gramme ou une molécule, au lieu de la masse de la Terre, on trouve 207 et 364 millions d'années pour que la masse formée atteigne le premier dixième du rayon, le millième de la masse. Le temps de formation des 9 autres dixièmes du rayon et des 999 millièmes de la masse *reste identiquement le même*. C'est-à-dire 20 millions. Il ne dépend que de la densité de la nébuleuse primitive,

Si nous calculons d'une façon précise le temps de formation pour $m = 1$ gramme nous trouvons 189,7 millions d'années pour concentrer une masse égale à celle de la Terre, et 226,6 pour une masse égale à celle du Soleil, soit 36.9 millions d'années pour passer de la masse de la Terre à celle du Soleil. Nous avons trouvé 40,7 millions d'années pour qu'une masse égale à celle de la Terre concentre une masse égale à celle du Soleil, soit 4,2 millions d'années en plus. Dans le premier cas, quand le noyau avait atteint la masse de la Terre, les molécules non condensées avaient eu le temps, pendant les 190 millions d'années antérieures de prendre une certaine vitesse, ce qui accélère la condensation ultérieure et la réduit de 4 millions d'années. A partir de la formation du dixième de la masse nous retrouverons les mêmes temps.

Pour former une masse égale au millième de celle du Soleil, nous trouvons 206.6 millions d'années avec une masse $m$ de 1 gr. soit 20,0 millions d'années pour former les 999 millièmes restant du Soleil. Pour une masse $m$, égale à la masse de la Terre, on trouve 20,66 pour former le millième du Soleil, soit 20,08 pour for-

mer le reste du Soleil, nous retrouvons donc ici exactement à 0,1 près les mêmes nombres de 20 millions qu'avec 1 gramme. *Ce temps de formation est donc bien indépendant de la masse primitive.*

Pour le temps de formation de masses M, plus grandes que le Soleil, correspondant à des rayons $r$, nous obtenons le tableau suivant :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r : r_1 =$ | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |
| $M : M_1 =$ | 1,0 | 1,33 | 1,73 | 2,20 | 3,38 | 8 | 27 | 64 | 125 | 1.000 |
| $t =$ | 40,7 | 41,5 | 42,3 | 43,0 | 44,3 | 46,8 | 50,2 | 52,8 | 54,1 | 60,7 |
| $\delta t =$ | 0,8 | 1,6 | 2,3 | 3,6 | 6,1 | 10,5 | 12,1 | 13,4 | 20,0 | |

La dernière ligne indique le temps de formation à partir de la masse du Soleil, temps de formation *indépendant de la masse primitive.* Ainsi le Soleil une fois formé n'aurait mis que 6 millions d'années de plus, pour acquérir une masse huit fois plus grande, rayon double ; 10 millions pour une masse 27 fois plus grande ; 20 millions d'années pour une masse 1000 fois plus grande. En ajoutant encore 20 millions d'années, on obtiendrait une masse concentrée égale à un million de fois celle du Soleil, dépassant toute masse connue.

D'ailleurs la formule (16) donne 2,014 millions d'années pour $n = 2$. La masse concentrée double donc tous les 2 millions d'années. Pour la quintupler, $n = 5$, il font 4,67 millions et 6,99 pour la décupler, $n = 10$.

De même si l'on suppose une masse attractive $m$ deux fois plus petite, il lui faudra 2 millions d'années de plus pour former la même masse M, et, ainsi de suite. Ces nombres permettent de se rendre compte facilement de la variation du temps de formation $t$ pour les différentes valeurs de M et de $m$.

**11. Accélération ou retard de la formation et de l'évolution des astres suivant la densité du milieu.** — Nous avons étudié le temps de formation relatif aux masses $M$ et $m$. Nous avons supposé à la nébuleuse primitive une densité $\rho_0 = 1{,}4 \times 10^{-22}$ qui serait celle de la masse solaire répandue dans une sphère d'un rayon égale à 100.000 fois la distance de la Terre au Soleil. Désignons ce rayon de base par $r_0$ et le temps de formation dans les différents cas étudiés par $t_0$. En supposant la masse solaire répandue primitivement sans une sphère de rayon $r$, pour les mêmes M et $m$ on aura

$$(19) \qquad \alpha t = \alpha_0 t_0, \qquad \frac{t}{t_0} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{r^3}{r_0^3}}$$

Les temps de formation précédents seront en raison inverse de la racine carré de la densité $\rho$. Pour $r = \frac{1}{4} r_0$ on aurait $\rho = 64\rho_0$ et $t = \frac{1}{8} t_0$. Tous les nombre-ci-dessus serait à diviser par 8. Si on suppose un rayon primitif plus petit, une densité plus grande, on obtiendra le tableau suivant,

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r : r_0 =$ | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0.5 | 0.3 | 0,2 | 0,1 |
| $\rho : \rho_0 =$ | 1,0 | 1.37 | 1,95 | 2,92 | 4,64 | 8 | 37 | 125 | 1.000 |
| $t : t_0 =$ | 1,0 | 0,837 | 0,714 | 0,585 | 0,464 | 0,353 | 0,164 | 0,090 | 0,031 |

Si la densité de la nébuleuse avait été 1000 fois plus forte, c'est-à-dire si la masse solaire avait occupé une sphère de 10.000 fois seulement la distance Terre-Soleil, le temps de formation total aurait été réduit aux 31 millièmes de sa valeur, c'est-à-dire à 1,27 millions d'années au lieu de 41, pour une masse attractive $m$ égale à celle de la Terre, ou bien réduit à 6,81 ou 11,8

au lieu de 227 et 364 millions pour une masse attractive égale à 1 gr. ou à une molécule d'hydrogène.

Le temps de formation des 999 millièmes de la masse, après l'amorçage du début, variable suivant $m$, aurait été réduit en toute hypothèse à 620.000 ans seulement, au lieu de 20 millions d'années. Pour un rayon de 50.000 $r_1$, une densité 8 fois moindre, ce temps de formation aurait été réduit à 7 millions d'années. Il serait à peu près de un tiers de $t_0$, exactement, 0,353.

Supposons que le Soleil, et les étoiles voisines aient été formés dans un milieu de densité $\rho$ et qu'à une certaine distance, la densité de la nébuleuse ait été 1000 fois plus grande c'est-à-dire $1,4 \times 10^{19}$ au lieu de $1,4 \times 10^{22}$. Dans le cas de deux soleils, formés par l'attraction d'une masse additionnelle égale à celle de la Terre, le nôtre aurait mis 41 millions d'années pour se former et l'autre, 1,27 million seulement. Celui-ci aurait donc rayonné pendant 40 millions d'années en plus. En admettant, une masse additionnelle de 1 gr. seulement ce dernier aurait rayonné pendant 220 millions d'années en plus. Il pourrait être sur son déclin, ou même éteint, ainsi que toutes les étoiles de la même région du ciel. *L'avancement de l'évolution d'un groupe d'étoiles peut donc dépendre en grande partie ou en totalité de la densité du milieu de la nébuleuse primitive*, c'est-à-dire de la densité dans la région de formation.

Avec une densité 4 fois plus forte le temps de formation aurait été réduit de moitié, c'est-à-dire à 20 et 113 millions. Ce serait le temps pendant lequel le premier astre aurait rayonné avant la formation de l'autre.

Si on considère, au contraire, des densités plus faibles, on voit que les temps de formation seraient doublés par

une densité 4 fois plus petite, triplés par une densité 9 fois plus petite, etc. Dans le cas d'une masse attractive égale à celle de la Terre, une masse égale à celle du Soleil aurait mis 82 millions, ou 123 millions pour se former. Le maximum du temps de formation, au lieu de 384 millions d'années deviendrait 768 ou 1152.

Pour la formation d'une masse égale au millième de celle du Soleil il aurait fallu 41 millions d'années pour une densité 4 fois plus petite ($20{,}7 \times 2 = 41{,}4$). C'était précisément le temps de formation totale du Soleil, dans le premier cas, pour $m$ égale à la masse de la Terre. Ainsi donc dans un milieu nébulaire, où la densité aurait été seulement 4 fois moindre que celle où le Soleil, et les étoiles de son système de la Voie Lactée se sont formées, les centres d'attraction ainsi formés dans le même temps auraient eu en moyenne des masses 1000 fois moindres.

Pour $m$ égale à la masse de la Terre la formule donne, en effet $M : M_1 = 0{,}001$.

En admettant une masse attractive de 1 gramme le temps de formation aurait été de 226, $6 \times 2 = 453$ millions d'années. On aurait dans ce cas là $M : M_1 = 10^{-16}$. Les astres formés dans ce milieu pendant le temps de formation du Soleil, dans les mêmes conditions, n'auraient atteint qu'une masse infime comparée à celle du Soleil et même de la Terre.

Ces régions de moindre densité nébulaire contiendraient donc surtout des systèmes en voie de formation qui seraient au début même de leur formation, alors que les autres, formés dans des régions plus denses, auraient achevé leur formation depuis longtemps peut-être. Les premières seraient des régions de nébuleuses ou d'astres en formation, les secondes des régions d'étoiles, ou

d'amas stellaires peu condensés, comme la Voie Lactée. Les régions d'évolution plus avancée seraient celles des amas stellaires déjà condensés ou globulaires. Un stade plus avancé encore aboutirait à des amas invisibles, s'organisant en systèmes, la région des nébuleuses spirales.

12. **Variation de la densité du milieu au voisinage d'une étoile en formation.** — Pour tous les éléments du même milieu de densité $\rho$, au bout du même temps $t$, on a $\alpha t$ constant. La formule (10), applicable dès que la masse formée M surpasse un peu $m$ qui est très petit, c'est-à-dire sensiblement pendant toute la formation, donne alors

$$r^2(r - x) = r^2 e = C^{te} \tag{20}$$

*Le chemin parcouru e par une molécule au bout du temps t varie en raison inverse du carré de sa distance primitive au centre.*

Désignons par $\partial r$ la distance de deux molécules dans le milieu primitif supposé homogène. Leur distance dans le sens radial, vers le centre, deviendra $\partial' x$ et l'on obtient en différenciant la formule ci-dessus

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 3 - 2\frac{x}{r} = 2\frac{e}{r} + 1. \tag{21}$$

La distance latérale des molécules, qui restent sur une même sphère, varie proportionnellement à $x$. Elle devient $\partial' x$ et l'on a

$$\frac{\partial' x}{\partial r} = \frac{x}{r}.$$

La densité du milieu deviendra $\rho'$ à la distance $x$ et l'on aura

$$(22) \qquad \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\delta x}{\delta r}\left(\frac{\delta' x}{\delta r}\right)^2 = \left(3 - 2\frac{x}{r}\right)\frac{x^2}{r^2}$$

Considérons d'abord la valeur de la densité au *voisinage immédiat de la surface de l'astre*. $x$, sera le rayon de l'astre formé au temps $t$. Désignons par $x_1$ le rayon de l'astre à un temps $t_1$ et $r_1$ le rayon correspondant dans la nébuleuse. Si nous supposons la densité de l'astre uniforme, comme celle de la nébuleuse, les éléments restent à la même distance relative du centre. On a

$$(23) \qquad \frac{x}{r} = \frac{x_1}{r_1} = \text{C}^{te} \qquad \frac{\rho}{\rho'} = \left(3 - 2\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{x_1^2}{r_1^2} = \text{C}^{te}.$$

*La densité du milieu reste donc constante au voisinage de l'astre pendant tout le temps de la concentration.*

Pour le Soleil et pour notre nébuleuse on a

$$D_1 = 1{,}41 \ . \qquad \rho = 1{,}41 \times 10^{-22}$$

On trouve

$$\rho' = 1{,}53 \times 10^{14}\ \rho = 2{,}14 \times 10^{-8}$$

La densité de l'air est $1{,}3 \times 10^{-3}$, on a par rapport à l'air $\rho' = 1{,}65 \times 10^{-5}$. La densité au voisinage du Soleil en formation aurait été environ les 16 millionièmes de la densité de l'air. Elle aurait été 100 millions de millions de fois plus grande que la densité de la nébuleuse.

*La formule* (22) *montre que la densité au voisinage d'un astre en formation varie en raison inverse du carré des distances au centre.*

Cette loi simple permettra d'étudier l'action d'un mi-

lieu sur le mouvement des astres en formation, comme des planètes et des satellites.

Si nous calculons *la densité du milieu à différentes distances à la fin de la formation* d'une masse égale à celle du Soleil, on obtient le tableau suivant. La première ligne donne la distance du centre, en rayons de l'orbite terrestre, la deuxième ligne donne la densité correspondante multipliée par $10^{15}$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x =$ | 0,005 | 1 | 2 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
| $\rho' =$ | $2{,}14 \times 10^{7}$ | 467 | 117 | 18,7 | 4,67 | 1,17 | 0,187 | 0,047 |

A la distance de la Terre $x = 1$ la densité aurait été encore 3 milliards de fois plus grande que celle de la nébuleuse. A la distance de Neptune elle aurait été 3 millions de fois plus grande.

13. **Formation simultanée d'un nombre quelconque d'astres dans un milieu indéfini.** — Au lieu de considérer un seul centre d'attraction dans la nébuleuse primitive infinie, il faut en supposer un nombre quelconque. Pour simplifier les formules nous supposerons d'abord que toutes les masses attractives sont égales et réparties uniformément à des distances de l'ordre de celles des étoiles. Chaque centre sera alors entouré de surfaces équipotentielles sensiblement sphériques, au moins jusqu'à une certaine distance.

L'attraction sur la ligne des centres de deux d'entre eux sera, en appelant $r_0$ la distance du point d'attraction nulle,

$$\gamma = -f\frac{m}{r^2} + f\frac{m}{(2r_0 - r)^2} = -f\frac{m}{r^2}\beta. \tag{24}$$

Les autres centres étant disposés symétriquement par

rapport à cette ligne, cette formule donne une représentation assez exacte de l'attraction moyenne autour d'un centre, surtout au voisinage de ce centre, ce qui importe le plus, car nous verrons que les éléments un peu éloignés n'ont sans doute pas pu contribuer à la formation de l'étoile, ni de son système planétaire.

Si nous reprenons l'étude du temps de chute pour un élément situé à une distance $r$ sous l'action d'une masse attractive supplémentaire $m$, nous voyons qu'il suffit, dans les formules établies ci-dessus, de remplacer $m$ par $m\beta$, car le temps de chute dépend avant tout de l'attraction primitive $\gamma$,

$$t\sqrt{4\pi f\rho} = \text{Log } 3{,}68\frac{4\pi\rho r^3}{m\beta}.$$

Il suffit d'ajouter au temps calculé précédemment, ou plutôt à $\alpha t$, la valeur du logarithme népérien de $1/\beta$. Or, pour une distance $r = \frac{1}{2} r_0$, à la moitié de la distance du point mort, la valeur de $\beta$ est $\frac{8}{9}$, n'a diminué que de $1/9$ et la correction introduite par son logarithme n'est que de 0,01.

C'est seulement pour les éléments au voisinage du point d'attraction nulle que le temps augmente d'une façon considérable et la chute de ces éléments subirait un retard de plus en plus grand. L'action des centres d'attraction voisins leur fera subir en outre une déviation de plus en plus considérable et leur mouvement de rotation sera trop grand pour qu'ils puissent passer assez près de leur centre d'attraction pour être captés. Tous ces éléments, à partir d'une certaine distance, formeront des comètes lointaines ou des systèmes planétaires (V. Ch. X).

Ces centres d'attraction multiples, qui ont formé les étoiles, pouvaient être plus ou moins resserrés suivant les régions de l'espace. La formation a été d'autant plus vite terminée qu'ils étaient plus rapprochés l'un de l'autre, toutes choses égales d'ailleurs.

Ce sera là une nouvelle cause possible des différences d'évolution suivant les régions. Les régions à centres nombreux et rapprochés auraient donné naissance à des étoiles plus nombreuses et plus petites, plus rapidement évoluées, qui se seraient condensées plus rapidement en amas. On obtiendrait le même résultat en somme que par une augmentation de la densité moyenne ou des masses attractives primitives, ce qui accélère l'évolution.

Il semble bien que la Voie Lactée avec ses étoiles brillantes, sans condensation en amas, ou en amas ouverts, à peine amorcés, est une région au début de l'évolution stellaire. La région des amas globulaires sur les confins de celle-ci serait une région à évolution plus avancée, parce que les centres primitifs d'attraction y auraient été plus nombreux ou de masses plus considérables. Plus loin la région des nébuleuses spirales nous montrerait des amas stellaires déjà en conflagation, par leurs attractions mutuelles, où l'évolution stellaire plus avancée entrerait dans une nouvelle phase.

## CHAPITRE IX

### DÉTERMINATION DE LA TEMPÉRATURE DE FORMATION DES ASTRES. RELATION ENTRE LE TEMPS ET LA TEMPÉRATURE DE FORMATION.

1. **Le problème et ses résultats.** — Le problème consiste à déterminer la température qu'aura prise chaque couche successive d'un astre, à mesure qu'elles se sont formées, et la température superficielle finale de l'astre une fois formé.

La source principale d'énergie est celle qui a déjà présidé à la formation, c'est-à-dire la gravitation. Les autres sources d'énergie comme les transformations chimiques, l'énergie intraatomique ou radioactive, sont, ou trop faibles ou trop lentes, par rapport à l'action de la gravitation, comme on l'a vu déjà à propos de l'entretien de la chaleur solaire, chapitre 6. Elles ne constituent qu'une valeur d'appoint, négligeable dans une première approximation. Ceci est encore beaucoup plus vrai ici où la chaleur due à la gravitation et dégagée par le choc l'est à peu près instantanément par la couche en formation qui s'ajoute à l'astre déjà formé.

Supposons un astre quelconque en formation dans un milieu quelconque. La masse déjà formée attire les éléments environnants. Ceux ci tombent à sa surface avec une certaine force vive, en dégageant de la chaleur

et en formant de nouvelles couches. Chacune de ces couches prendra une température d'équilibre, qui dépendra de la chaleur fournie et de la chaleur rayonnée pendant le même temps.

On peut établir une relation générale entre la vitesse de formation de chaque couche et sa température d'équilibre. On peut calculer alors le temps et la température de formation dans différents cas limites, qui donnent des valeurs maximum, minimum ou probables, et dans les cas pratiques de formation à l'intérieur d'une nébuleuse.

On trouve que le temps et la température se déterminent réciproquement. Si on augmente le temps de la formation, la température diminue et on diminue par là le temps d'évolution ultérieure. Ce problème imposera donc à nos conceptions des limites de variations assez étroites et dont il faudra tenir compte [1].

2. **Relation entre la vitesse de formation et la température de chaque couche** — Une masse $m$ sphérique, et composée de couches sphériques d'égale densité, de rayon $r$, aura pour potentiel à sa surface

$$V = f\frac{m}{r}. \qquad (1)$$

Cette expression donne l'énergie produite par la chute d'une masse égale à l'unité, et tombant d'une grande distance à la surface de la masse $m$. On sait d'ailleurs que

[1] Voir. *C. R.*, t. 166, p. 844, — t. 170, p. 1565, — t. 171, p. 707 (A. Véronnet).

l'expression de la vitesse acquise dans ce cas-là donne pour l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2}v^2 = \gamma r = f\frac{m}{r}$$

$\gamma$ représente l'attraction de la masse $m$ à sa surface, à la distance $r$ du centre.

L'énergie élémentaire produite par la chute d'une couche sphérique de masse $dm$, d'épaisseur $dr$, de densité $\rho$, qui s'ajoute à la masse $m$ sera

$$dE = f\frac{m}{r}dm = 4\pi f\rho m r dr. \qquad (2)$$

Cette énergie se transforme en chaleur et la température de la surface s'élève jusqu'à ce que la quantité de chaleur rayonnée soit égale à la quantité de chaleur produite. En vertu de la loi de STEFAN l'énergie calorifique $dQ$ rayonnée pendant le temps $dt$ par la surface S sera

$$dQ = q_1 S\frac{T^4}{T_1^4}dt = 4\pi q_1 r^2\frac{T^4}{T_1^4}dt. \qquad (3)$$

où $q_1$ est la quantité de chaleur rayonnée par unité de surface à la température $T_1$. La quantité de chaleur absorbée par la masse est négligeable dès que la température monte un peu, car elle est proportionnelle seulement à T. On peut donc écrire, pour les températures que nous aurons à considérer, $dE = dQ$ d'où

$$\frac{dr}{dt} = \frac{q_1}{f}\frac{rT^4}{T_1^4\rho m}. \qquad (4)$$

Cette formule donne la température d'équilibre T de la couche de rayon $r$ de densité $\rho$, en fonction de la vitesse

d'accroissement $dr/dt$ du rayon de l'astre et réciproquement.

Cette formule nous montre nettement *qu'en toute hypothèse* et quelles que soient les conditions de formation que nous pourrons admettre, si nous augmentons la température de formation nous augmenterons la vitesse et nous diminuerons le temps de formation et réciproquement. Nous verrons ainsi que les *conditions de formation restent étroitement limitées*.

3. **Température et densité uniformes. Temps maximum de formation du Soleil.** — Le cas le plus simple est celui où la densité et la température de l'astre seraient uniformes à l'intérieur. Nous avons vu d'ailleurs que pour un astre qui suit la *loi des gaz réels*, si la température est supposée uniforme, il y a au-dessous de l'atmosphère, dès que la densité atteint le $\frac{1}{3}$ de la densité limite du gaz, formation d'un noyau sensiblement homogène. On retrouve ce même noyau de densité et de température uniformes dans tous les autres cas. Ce sera bien un cas général. Alors en faisant T et $\rho$ constants on a

$$(5) \qquad m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{3q_1 T^4}{4\pi f T_1^4}\frac{1}{\rho^2 r^3}$$

T est la température du noyau, qui n'est pas nécessairement celle de $T_1$ correspondant à $q_1$, même si $T_1$ est la température à la surface.

En intégrant de o à $r$ on aura pour le temps de formation $t$ de la masse $m$ de rayon $r$,

$$(6) \qquad t = \frac{4\pi f}{9q_1}\frac{T_1^4}{T^4}\rho^2 r^3 = \frac{1}{3}\frac{f}{q_1}\frac{T_1^4}{T^4}\rho m.$$

On voit d'après la formule (6) que le temps de formation serait proportionnel à la masse, à la densité et inversement proportionnel à la 4e puissance de la température.

On aura pour des astres formés ensemble, pendant le même temps $t$,

$$(6) \qquad \frac{\rho^2 r^3}{T^4} = C^{te}, \qquad \text{ou} \qquad \rho \frac{m}{T^4} = C^{te}$$

De plus, pour un astre condensé, la densité est égale à la densité limite du gaz et celle-ci est à peu près inversement proportionnelle à la température T [1]. on aura pour des astres formés des mêmes éléments

$$\rho T = \rho_1 T_1,$$

d'où l'on déduit

$$(7) \qquad T^2 = kr \qquad \text{et} \qquad T^3 = k'm.$$

*La température de formation serait proportionnelle à la racine carrée du rayon ou à la racine cinquième de la masse, pour des astres formés dans le même milieu et des mêmes éléments, dans le cas d'une densité et d'une température uniformes à l'intérieur.*

Il faudrait une masse $2^5 = 32$ fois plus considérable qu'une autre pour obtenir une température de formation double. Nous retrouverons la même loi dans les autres cas de formation. Elle cadre suffisamment bien avec les masses et les températures connues, du moins en première approximation.

[1] Contraction et évolution du Soleil. *C. R.*, t. 166, p. 642 et 812 (1918).

La température est en plus inverse de la densité, mais en vertu d'une relation purement physique des gaz réels, $\rho T = C^{te}$.

Si la température intérieure T est prise égale à la température $T_1$ on a simplement

$$(7)' \qquad t = \frac{4\pi f}{9 q_1} \rho^2 r^3 = \frac{1}{3} \frac{f}{q_1} \rho m.$$

Appliquons cette dernière formule à la formation du Soleil, nous obtiendrons le temps de sa formation dans l'hypothèse où sa température de formation serait la même à toute profondeur et précisément égale à sa température actuelle $T_1$ à la surface. Or, la température de formation a dû être supérieure à la température actuelle [1] et la température intérieure ou du moins la température moyenne intérieure, semble devoir être supérieure à la température superficielle. Nous obtiendrons donc *le temps de formation maximum*. Nous voyons d'après (6) que cette valeur ne dépend que des quantités connues, la densité $\rho$, la masse $m$, le rayonnement $q_1$ du Soleil [2].

Nous pouvons transformer la formule (7)'. Intégrons la formule (2) dans le cas d'une densité constante, de o à $r$.

[1] La loi des gaz réels montre qu'un astre gazeux se refroidit et se contracte en rayonnant de la chaleur, comme un liquide normal (*Comptes rendus*, t. 166, p. 286 : t. 167, p. 67 (1918) et t. 168, p. 679 (1919).

[2] Il faut remarquer en particulier que le coefficient de rayonnement $q_1$ restera constant si la température et les conditions physiques restent les mêmes comme dans l'hypothèse envisagée ici. Contraction et évolution du Soleil (*C. R.* t. 166, p. 642 et 812 (1918).

On obtient pour l'énergie totale de la formation de la masse

$$(8) \qquad E = \frac{3}{5} f \frac{m^2}{r} \qquad \text{ou} \qquad E = \frac{3}{5} m\gamma r.$$

Désignons par $Q_1$ la quantité de chaleur rayonnée par le Soleil pendant l'unité de temps, la formule (3) nous donne

$$Q_1 = 4\pi q_1 r^2 = \frac{1}{3} q_1 \frac{m}{\rho r}$$

et la formule $(7)'$ devient en y portant ces valeurs

$$(8)' \qquad t = \frac{5}{3} \frac{E}{Q_1} = \frac{m\gamma r}{Q_1}$$

Si l'on prend pour unité de temps l'année, le rapport représente le nombre d'années de chaleur solaire, au taux actuel, fournies par la formation du Soleil. *Le temps de formation du Soleil serait donc égal au plus aux cinq tiers du nombre d'années de chaleur que sa formation lui a fourni.*

Or dans le cas d'une densité constante l'énergie produite par la formation du Soleil correspondrait à 18,6 millions d'années de chaleur, avec un rayonnement de 2,0 calories par minute et $cm^2$. Pour fournir une température minimum de 6.000 degrés le Soleil aurait dû se former en 31 millions d'années au plus. C'est un maximum et sa valeur ne dépend que de quantités bien connues, sans autre hypothèse.

4. **Cas des hautes températures. Température maximum.** — Conservons la même hypothèse de la densité et de la température uniformes et supposons que

la température de formation du Soleil ait été double de la température actuelle, soit environ 12.000°, avec la même densité, sa radiation et sa vitesse de formation auraient été $2^4 = 16$ fois plus grande d'après (6). Le temps de formation aurait dû être réduit à deux millions d'années seulement. Supposons une *température triple*, ce temps sera à diviser par $3^4 = 81$. Il se réduira à moins de 400.000 ans.

Ces nombres sont encore trop grands, car si nous augmentons la température nous sommes obligés d'augmenter le rayon, ou de diminuer la densité. Nous pouvons faire approximativement, comme on l'a vu plus haut, $\rho$ inversement proportionnel à T, ou $\rho T = \rho_1 T_1$ la formule (6) devient

$$t = \frac{f \rho_1 T_1^5}{3 q_1} \frac{m}{T^5}. \tag{9}$$

*Pour le même astre le temps de formation maximum serait en raison inverse de la cinquième puissance de la température.* En admettant une température double ou triple, le temps de formation maximum du Soleil serait réduit à un million d'années ou même à 130.000 ans.

D'après la loi de dilatation admise, le rayon du Soleil aurait été voisin de $\sqrt[3]{2} = 1{,}26$ ou de $\sqrt[3]{3} = 1{,}44$ de sa valeur actuelle. La densité aurait été moitié moindre, c'est-à-dire 0,7 dans le premier cas, ou trois fois moindre c'est-à-dire 0, 47, moitié de celle de l'eau, dans le second cas.

D'un autre côté il semble bien que la formation en 130.000 ans soit un minimum. Alors, *ces calculs nous montrent que la température de formation du Soleil n'a pas dû dépasser le triple de sa température superficielle*

*actuelle ni son rayon dépasser une fois et demie le rayon actuel*, On voit à quel point le temps et la température se limitent réciproquement d'après (9).

Les conditions physiques du Soleil, densité et température, n'ont jamais dû être très différentes des conditions actuelles. Nos calculs s'y étendent toujours raisonnablement, au moins comme première approximation, et les conditions d'équilibre, déterminées par la loi des gaz réels, nous permettent d'en poursuivre légitimement l'évolution dans le passé et dans l'avenir avec la même approximation.

Nous pouvons faire remarquer que la loi *des gaz parfaits*, ou loi de MARIOTTE, exige pour l'équilibre interne adiabatique du Soleil des millions de degrés comme température intérieure moyenne. Or, une température 10 fois plus grande que la température superficielle aurait exigé une formation au moins 10.000 fois plus rapide, soit en trois mille ans au plus, en admettant la densité actuelle, ou 300 ans seulement en tenant compte de la variation de densité. Un Soleil de 600.000° aurait dû se former 10,000 fois plus vite soit en 110 jours ou 1,1 jours.

Enfin pour atteindre six millions de degrés la nébuleuse solaire aurait dû se contracter en un quart d'heure. Il aurait fallu une *contraction instantanée* ou résultant du choc direct entre deux astres. Même dans ce cas la dilatation résultante aurait réduit la température au dessous de 100.000 degrés, et les millions de degrés exigés par la formule des gaz parfaits sont absolument inadmissibles (Voir *C. R.*, t. 172, p. 666).

5. **Cas de la loi des gaz parfaits. Temps maximum.** — Dans les paragraphes précédents on a supposé la densité constante, ce qui est le cas pratique correspondant à la loi des gaz réels. Les résultats ne sont pas beaucoup modifiés si on étudie le cas limite théorique où la densité serait croissante vers le centre, avec la concentration maximum, qui correspond à celle des gaz parfaits. On suppose toujours que la température est uniforme, ce qui donne le temps maximum, ou du moins un temps plus grand que pour une température croissant vers le centre.

Dans ce cas la densité intérieure varie en raison inverse du carré de la distance au centre. L'énergie fournie par la formation est les 5/3 de celle qui est donnée par une densité constante, soit 31 millions d'années de chaleur. Voir le chapitre 6 sur *l'entretien de la chaleur solaire* et H. Poincaré, les *Hypothèses cosmogoniques*, p. 200.

On a

$$\rho r^2 = \rho_1 r_1^2 = \frac{1}{3} D \frac{r_1^2}{r^2}. \tag{10}$$

La densité superficielle $\rho_1$ est égale au tiers de la densité moyenne D. La masse $m$ est proportionnelle à $r$. Ces valeurs portées dans l'expression générale de la vitesse de formation (4) donnent

$$q_1 dt = \frac{4}{9} \pi f D^2 r_1^4 \frac{dr}{r^2}. \tag{11}$$

L'intégration est immédiate. On intégrera de $r$ à $r_1$ pour avoir le temps de formation de la partie située

entre $r$ et la surface, car nous aurions un temps infini du centre à $r$. On obtient

$$(12)\quad t = \frac{E}{Q_1}\left(\frac{r_1}{r} - 1\right), \qquad \text{ici} \qquad E = f\frac{M^2}{r_1} = \frac{m\gamma r}{Q_1}.$$

Si nous comparons avec le temps donné dans l'hypothèse précédente formule (8)', où la parenthèse était remplacée par $\frac{5}{3}$, nous voyons qu'en faisant $r = 0{,}1$, les nombres obtenus sont à multiplier par 9. C'est-à-dire qu'après la formation d'un noyau où la densité deviendrait infinie, dont le volume est seulement la millième partie du volume total, et la masse la dixième partie, le temps de formation serait 9 fois plus grand que dans le cas d'une densité constante. On obtient le *maximum de 280 millions d'années*.

A la distance 1/8 du centre la densité serait de 28, c'est-à-dire plus grande que toutes les densités connues. On ne peut guère appliquer la formule plus loin. Il faut alors multiplier le temps par 7. Le maximum se réduit à 220 millions d'années. Le temps de formation de la portion contenue dans le dernier dixième serait de 3,4 millions d'années. On retrouve 31 millions pour $r = \frac{1}{2} r_1$ pour la portion contenue au delà de la moitié rayon, c'est-à-dire pour la formation de la moitié de la masse.

6. **Cas où l'on se donne la vitesse de formation.** — Nous avons jusqu'ici supposé données la densité et la température et nous en avons déduit la vitesse de concentration et le temps de formation. Supposons maintenant,

au contraire, que la vitesse de formation est donnée, nous allons en déduire la température de formation de chaque couche.

Dans la première hypothèse, densité et température uniformes, la vitesse de formation d'après (5) varierait en raison inverse du carré du rayon. Elle serait plus rapide au début et infinie au centre. C'est plutôt le contraire qui a dû arriver.

Supposons d'abord la vitesse d'accroissement constante. Avec la densité constante, la formule (5) nous donne d'abord

$$\frac{T^4}{r^2} = \frac{T_1^4}{r_1^2} = C^{te}, \qquad \frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{r}{r_1}} \tag{13}$$

La température interne de formation sera alors proportionnelle à la racine carrée du rayon. Elle serait nulle au centre, où nous pourrions avoir eu un noyau solide. Il aurait pu même rester tel depuis la formation, car la propagation de la chaleur par la diffusion seule, sans convection comme ce serait ici le cas, serait extrêmement lente et atteindrait seulement quelques dizaines de kilomètres en un million d'années.

En intégrant ensuite de o à $r_1$ la formule (5) d'où on a éliminé T, on obtient

$$t = \frac{4\pi f}{3q_1}\rho^2 r_1^3 = f\frac{\rho M}{q_1} \tag{14}$$

Le temps de formation serait trois fois plus grand que dans le premier cas examiné, formule (6).

La température moyenne serait donnée par l'expression

$$MT_m = \int_0^R T dm = \frac{8}{7}\pi\rho r_1^3 T_1 = \frac{6}{7}MT_1, \tag{15}$$

d'après la valeur de T donnée ci-dessus. Elle serait les 6/7 de la valeur superficielle. Le temps et la température de de formation restent du même ordre. Le temps est encore inverse de $T^4$.

Prenons une vitesse de formation moins rapide encore, par exemple proportionnelle au carré du rayon, ce qui donne une vitesse nulle au début et d'abord très lente. On a, $k$ étant une constante

$$(16) \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{r^2}{k} \qquad k = \frac{4\pi f}{3q_1}\frac{T_1^4}{T^4}\rho^2 r^4$$

d'où

$$(17) \qquad \frac{T^4}{r^4} = \frac{T_1^4}{r_1^4} = C^{te} \qquad \text{ou} \qquad \frac{T}{T_1} = \frac{r}{r_1}.$$

La température de formation est alors proportionnelle au rayon. La température moyenne devient égale au 3/4 de la température superficielle.

Le temps s'obtient ensuite en intégrant de $r$ à $r_1$ et non de o ce qui donnerait une valeur infinie. On a

$$(18) \qquad t = \frac{4\pi f}{3q_1}\rho^2 r_1^4\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) = f\frac{\rho M}{q_1}\left(\frac{r_1}{r} - 1\right).$$

Le temps serait infini si l'on remontait jusqu'au centre. On ne peut comparer le temps de formation que pour les couches supérieures. Pour $r = \frac{1}{2} r_1$, la masse intérieure négligée serait seulement de 1/8 de la masse totale, le temps de formation serait égal à celui de l'hypothèse précédente, soit trois fois celui d'une température constante, ou environ 100 millions d'années pour le Soleil.

Pour $r = 0{,}1\, r_1$ et les 999 millièmes de la masse, le

temps de formation serait seulement à multiplier par 9. Dans le cas d'une température interne double, ce temps se réduirait à 9 millions d'années. Il se réduirait à 1.200.000 ans dans le cas d'une température triple de la température superficielle actuelle avec $t$ inverse de $T^5$.

Dans ces deux dernières hypothèses la température est nulle au centre. Nous pouvons avoir un noyau solide et resté tel encore maintenant.

Ainsi dans deux cas très différents, qui semblent devoir englober la formation réelle, la température moyenne de l'astre reste sensiblement égale à la température superficielle de formation et le temps de formation reste du même ordre, si l'on néglige le début et la formation du premier dixième de la masse. Ces conclusions sont confirmées d'ailleurs en étudiant la formation réelle d'un astre au sein d'une nébuleuse.

7. **Température de formation d'une étoile isolée.** — Les calculs précédents sur le temps et la température de formation sont indépendants de toute hypothèse sur le mode de formation de l'astre considéré. Nous allons voir ce qu'ils deviennent dans les cas pratiques de formation étudiés dans le chapitre précédent, astre isolé et ensemble d'astres dans une nébuleuse indéfinie.

Dans le premier cas, le temps de formation $t$ d'une masse M sous l'action d'une masse attractive supplémentaire $m$, dans un milieu de densité $\rho$, est donné par la formule,

$$(19) \qquad t\sqrt{4\pi f\rho} = \operatorname{Log} \frac{36}{(2+\sqrt{3})^{\sqrt{3}}} \frac{M}{m}.$$

$m$ et $\rho$ sont des constantes. En différentiant on obtient

l'augmentation $d$M de la masse M pendant l'instant $dt$

$$\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} = \sqrt{4\pi f\rho}\, dt \tag{20}$$

L'énergie produite par la chute de l'accroissement de masse $d$M sur la masse M supposée sphérique, de rayon $r$, est

$$d\mathrm{E} = f\frac{\mathrm{M}}{r}d\mathrm{M} = f\frac{\mathrm{M}^2}{r}\sqrt{4\pi f\rho}\, dt \tag{21}$$

Cette énergie $d$E se transforme en chaleur absorbée par $d$M élevée à la température T et en chaleur rayonnée proportionnelle à $r^2\mathrm{T}^4$ d'après la loi de Stefan. La chaleur absorbée devient assez vite négligeable devant la chaleur rayonnée par cm² : sec. à la température $\mathrm{T}_1$. On a la relation suivante qui donne la température sur le rayon $r$, ou à la surface de la masse M

$$\frac{\mathrm{T}^4}{\mathrm{T}_1^4} = \frac{f\sqrt{4\pi f\rho}\,\mathrm{M}^2}{4\pi q_1 r^3} = \frac{(4\pi f)^{3/2}}{9q_1}\mathrm{D}^2 r^3\sqrt{\rho} = \frac{\sqrt{4\pi f^3}}{3q_1}\mathrm{DM}\sqrt{\rho} \tag{22}$$

La température intérieure de formation d'un astre est proportionnelle à $\sqrt[4]{r^3}$, si la densité D reste constante. Elle serait nulle au centre. *On pourrait avoir un noyau central solide*, ou du moins à basse température et resté tel, à cause de la diffusion extrêmement faible aussi bien dans le Soleil que dans la Terre.

La quatrième puissance de la température finale superficielle de formation d'un astre est proportionnelle à sa masse M, à sa densité moyenne D, et aussi à la racine carré de la densité $\rho$ de la nébuleuse où il se forme.

Nous avons vu d'ailleurs, que d'après la loi des gaz réels, la densité des astres gazeux doit être sensiblement uniforme, et porportionnelle à la température. On retrouve les mêmes relations que plus haut entre la température, la masse, et le rayon

$$(23) \qquad T^5 = kM \qquad T^2 = k'r$$

Pour les astres formés des mêmes éléments, dans le même milieu, et dans le même temps, la température de formation serait proportionnelle à la racine cinquième de la masse, ou à la racine carrée du rayon [1].

Il faut exclure le cas de formation par choc.

La température de formation du Soleil a dû être au moins égale à sa température actuelle, ce qui nous donne une limite minimum de la densité de la nébuleuse primitive. La masse du Soleil et des planètes aurait dû être dispersée dans une sphère égale à près de 500.000 fois la distance Terre-Soleil. On en déduit le temps *maximum* que le Soleil a mis pour se former, qui est de 220 millions d'années, après la formation d'un noyau égal à la millième partie de sa masse [2]. Ce nombre a ceci de re-

[1]. La loi $T^5 = k\,m$ entraîne $T^2 = kr$, en admettant, comme on l'a vu, que la densité limite suit la loi des gaz parfaits, aux hautes températures des étoiles, $\rho T = C^{te}$. Pour des étoiles de même masse on aura $T^5 = k\,\rho T^6 = C^{te}$ et leur température sera inverse de la racine sixième de la densité. Cette loi ne s'applique qu'aux étoiles normales ou naines. Pour les géantes, Eddington trouve au contraire que leur température effective est proportionnelle à la racine sixième de la densité. Mais, comme on l'a vu, cette relation est déduite d'une conception hypothétique sur l'équilibre et de plus cette relation et toutes les autres analogues seraient indépendantes du temps et par conséquent de l'évolution, ce qui est inadmissible V. p. 75

[2] Le temps est inverse de la racine carrée de la densité de la

marquable qu'il dépend seulement de la valeur du rayonnement du Soleil connu à un dixième près.

En supposant la matière du Soleil dispersée dans une sphère d'un rayon de 100.000 unités on obtient une température de formation de 10.500° en lui supposant le rayon actuel, et de 9600° avec le rayon de 1.17 en tenant compte de la dilatation. Or, en se reportant aux calculs sur le refroidissement et l'évolution du Soleil on trouve, en remontant de l'époque actuelle, qu'il aurait eu une température de 9.600° avec un rayon de 1.15 il y a 820.000 ans. Il y a accord remarquable ici entre les chiffres obtenus par deux méthodes diamétralement opposées. Le temps de formation avec cette densité aurait été de 20 millions d'années seulement, comme on l'a vu.

Enfin si on réduit la dimension des éléments de notre système à 10.000 fois seulement la distance Terre-Soleil, ce qui pourrait être un minimum, on trouve une température maximum de formation de 20.000° et un rayon de 1,47 en tenant compte de la dilatation. Le temps de formation aurait été réduit à 640.000 ans, tandis que le temps d'évolution, après la formation, n'aurait été augmenté que de 30.000 ans. Ainsi une formation rapide, par choc par exemple, augmenterait la température mais très peu le temps d'évolution ultérieure qui reste inférieur à un million d'années.

nébuleuse, qui serait ici $5^3 = 125$ fois plus faible que dans le cas normal étudié au chapitre précédent. Ce temps, égal à 20 millions d'années, quelle que soit la masse attractive primitive pour les 999 millièmes de la masse, serait à multiplier par 11,2 d'où le nombre 220 millions.

*En résumé*, dans l'hypothèse de la formation au sein d'une nébuleuse homogène, le temps de formation du Soleil peut varier de 200 millions d'années à 640.000 ans. Le temps d'évolution depuis la formation varierait de 0 à 850.000 ans, et la température de formation resterait inférieure à 20.000°.

8. **Température de formation d'une étoile dans un ensemble. Maximum.** — Nous avons vu, au chapitre précédent, que, dans ce cas général, le temps de formation était donné par une formule où s'introduisait un terme $\beta$, fonction de la distance $r$,

$$t\sqrt{4\pi f\rho} = \operatorname{Log}\frac{36}{(2+\sqrt{3})^{\sqrt{3}}}\frac{4\pi\rho r^3}{3m\beta}, \tag{24}$$

$$\beta = 1 - \frac{r^2}{(2r_0 - r)^2}.$$

En différentiant par rapport à $r$ on obtiendra, comme dans le paragraphe précédent, l'accroissement $dM$ de la masse pendant le temps $dt$ et l'énergie produite. L'expression de la température résultante s'écrira alors :

$$\frac{T^4}{T_1^4} = \sqrt{4\pi f\rho}\, f\frac{DM}{3q_1}B, \tag{25}$$

$$B = \frac{3(r_0 - r)(2r_0 - r)}{3(r_0 - r)(2r_0 - r) + r^2}.$$

$r_0$ est la distance où l'attraction devient nulle, et B un terme nouveau introduit par $\beta$ dans l'expression de T. Dans le cas précédent d'un astre isolé on avait $B = 1$.

On retrouve ici le même résultat pour les couches centrales, où B est voisin de 1. *La vitesse et la température de formation sont nulles au début et au centre de l'astre*

pour croître ensuite. On obtient encore un *noyau solide* et froid.

*A partir du centre la température croît jusqu'à un maximum pour décroître ensuite* et tendre lentement vers zéro.

Si l'on regarde la densité de l'astre formé comme homogène, le rayon de la couche formée est proportionnel à $r$, son rayon primitif dans la nébuleuse. Le maximum de température, maximum de $Br^3$, a lieu aux $\frac{8}{10}$ du rayon (exactement 0,795). En supposant la matière du Soleil dispersée primitivement dans un rayon de 100.000 fois la distance du Soleil, ce maximum de température *serait de 7850°* au lieu de 10.500 degrés dans le cas d'un astre isolé.

Le maximum d'extension de la nébuleuse solaire, qui donnerait une température de formation égale à la température actuelle serait de 200.000 fois la distance du Soleil. Le temps maximum de formation serait réduit à 56 millions d'années, $\sqrt{2^3} = 2,82$. Enfin avec une extension de 10.000 fois cette distance seulement, on aurait 15.000° et un rayon de 1,36 au lieu de 20.000 degrés.

En considérant le cas normal, où la masse du Soleil était répandue dans une sphère d'un rayon de 100.000 unités, on obtient pour le temps de formation des couches successives du Soleil de dixièmes en dixièmes, et pour les températures correspondantes, le tableau suivant

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r =$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| $\partial t =$ | 5,4 | 3,2 | 2,4 | 1,9 | 1,6 | 1,4 | *1,3* | 1,4 | |
| T = | 1.930 | 2.730 | 4.380 | 5.400 | 6.300 | 7.100 | 7.600 | *7800* | 7400 |

La seconde ligne donne le temps $\partial t$ de formation de

chaque dixième du rayon, en millions d'années quel que soit le temps de formation du premier dixième et des conditions d'attraction au début. La plus grande vitesse de formation a lieu entre 0,7 et 0,8. On a supposé que la masse du Soleil était complètement formée avec la chute des éléments situés à la distance 0,9. Dans le cas d'un seul centre le temps de formation totale aurait été plus court de 2,5 millions d'années, soit 16,1 au lieu de 18,6.

La troisième ligne indique les températures. A 0,1 du centre, on n'aurait encore que 2.000° et 6.300 degrés à la moitié de la distance au centre. La température serait croissante du centre à la surface pour la plus grande partie de la masse, contrairement à ce qui a été admis dans la plupart des hypothèses sur la constitution physique du Soleil et des étoiles.

Les températures sont relatives à la température effective de la surface rayonnante ou de la photosphère, que l'on a prise égale à 6.000° actuellement pour le Soleil. La surface du noyau sensiblement homogène se trouverait au-dessous, à environ 50 ou 100 kilomètres au plus. En admettant ici un équilibre adiabatique, l'accroissement de température serait environ de 1° par 50 mètres, ce qui donne environ 1.000° ou 2.000° de plus à la surface du noyau qu'à la surface de la photosphère. La surface de formation réelle serait précisément celle du noyau, plutôt que celle de la surface rayonnante. D'ailleurs les relations réciproques des deux surfaces varieraient peu, au moins pendant la plus grande partie de la formation et les nombres trouvés seraient simplement augmentés de 3 dixièmes seulement. Le maximum de température interne serait de 10.500° et de 20,000° dans les deux cas cités plus haut.

Ce sont précisément les températures superficielles dans le cas d'un astre isolé.

En appliquant la formule ci-dessus à Jupiter et à la Terre, on trouve que leur température de formation serait de 5,74 et 17,1 fois plus petite que celle du Soleil, ce qui donnerait 3.500° et 1.200° en attribuant 20.000° au Soleil. Ces températures doivent être en réalité plus élevées, car pour les masses faibles l'épaisseur de l'atmosphère est relativement plus grande et il y a plus de différence entre les températures de la surface de formation et la température moyenne de rayonnement. D'ailleurs les planètes ne se sont pas formées dans les mêmes conditions que les étoiles. Les résultats ne peuvent être que grossièrement comparables.

Nous trouvons ici un maximum de température dans la vie des astres. Mais c'est un maximum bien différent de celui qu'avait supposé M. Lockyer. C'est un maximum de formation et non de condensation.

Dans la suite de son évolution la température de l'astre ne peut que diminuer. On a étudié précédemment (chapitre 4) le maximum de température que pourrait présenter un astre gazeux en équilibre au cours de son évolution. Ce maximum est bien au-dessus du maximum de formation. Aucun astre ne peut l'atteindre et tous se refroidissent en rayonnant. La distinction entre étoiles naines et géantes doit être cherchée ailleurs. Le rayon proprement dit d'une étoile ne peut pas dépasser le double ou le triple de son rayon sous une température normale. Il faut que l'enveloppe visible d'une géante soit une enveloppe extérieure à l'étoile proprement dite et maintenue au loin par la pression de radiation.

Nous verrons que l'action des centres voisins a fait

dévier de la chute directe les particules un peu éloignées du centre. Elles ont dû tourner autour de l'astre central, même assez loin, et ne pas concourir à sa formation : cet effet s'est produit au moins à partir de la distance égale à $1/2\ r$, de sorte que les masses plus rapprochées auraient seules formé le Soleil et l'étoile. Ce serait le dixième de la masse totale renfermée dans la sphère d'action primitive. Il faut donc probablement multiplier par 10 la masse primitive et par conséquent la densité primitive, en admettant toujours un rayon d'action de 100.000 unités. Les temps d'évolution seraient alors divisés par $\sqrt{10} = 3{,}2$ et les températures multipliées par $\sqrt[8]{10} = 1{,}33$. Les modifications ne seraient pas très considérables.

Au contraire en admettant un rayon d'action 2 à 3 fois plus grand, et peut-être plus probable, on retrouverait une densité de la nébuleuse voisine de celle qui a servi de base aux calculs et par conséquent on retrouverait sensiblement les mêmes temps et les mêmes températures de formation.

9. **Relations entre la masse, la température et le type spectral des étoiles.** — Nous avons vu, formules (7) et (23), les relations que l'étude de la *formation* d'une étoile permet d'établir entre la température, la masse et le rayon ; l'étude de l'*évolution* nous a donné les mêmes relations.

On peut les écrire,

$$\left(\frac{T}{T_1}\right)^3 = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{3/2} = \frac{M}{M_1}. \tag{26}$$

Pour deux étoiles, de formation et d'évolution nor-

males, la température actuelle est proportionnelle à la racine cinquième de la masse et à la racine carrée du rayon.

Ces formules ne peuvent s'appliquer qu'à des moyennes, car trop de causes peuvent venir modifier l'évolution. Elles donneront une *première approximation.*

La grandeur énergitique d'une étoile sera proportionnelle à $T^4r^2$. En appelant $\mu$ et $\mu'$ les grandeurs des deux astres rapportées à la même distance, on aura, en tenant compte de (26),

$$(27)\quad \mu' - \mu = \frac{2}{5}\log\frac{T^4r^2}{T'^4r'^2} = 4\log\frac{M}{M'} = 20\log\frac{T}{T'}.$$

*La différence des grandeurs absolues de deux étoiles est égale à 4 fois le logarithme vulgaire du rapport des masses ou à 20 fois le logarithme du rapport des températures.*

Or, les températures des différents types d'étoiles ont été déterminées par Wilsing et Scheiner [1] comme une moyenne des températures qu'ils ont déterminées directement et par M. Saha d'après l'étude qu'il a faite de l'ionisation et de l'apparition de tel groupe de raies [2]. Ces données permettent de calculer au moyen de (26) la masse moyenne correspondant à chaque type spectral. Ces masses vont de 34 à 0,18, la masse du Soleil étant prise pour unité. Ce sont précisément les limites que nous connaissons entre les $B_3$ et les $M_a$.

[1] Postdam, *Publikationen*, t. 74. 1919.

[2] Saha, *Philosophical magazine*, t. 40, p. 472 et 809 et t. 41, p. 267. Voir aussi A. Milne, *Monthly Notices*, t. 81, 1921. *The Observatory*, p. 267 (1921).

Ces masses moyennes étant connues on peut en déduire au moyen de (27) les grandeurs moyennes des étoiles normales, ou naines correspondantes. On obtient les grandeurs moyennes o pour les $B_5$, 10 pour les $M_a$, la grandeur du Soleil étant prise égale à 5,5 à 10 parsecs, moyenne des $G_o$. Ce sont bien les valeurs données par les travaux statistiques récents.

Les résultats des calculs sont donnés pour chaque type spectral dans le tableau ci-dessous.

| Types | $B_0$ | $B_5$ | A | $F_0$ | $G_0$ | $K_0$ | $K_5$ | $M_a$ | $M_d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T : T_1 =$ | 2,55 | 2,0 | 1,71 | 1,29 | 1 | — | — | 0,71 | 0,57 |
| | 2,06 | 2,02 | 1,86 | 1,40 | 1 | 0,85 | 0,67 | 0,61 | — |
| $M : M_1 =$ | 108 | 32,0 | 14,6 | 3,57 | 1 | — | — | 0,18 | 0,05 |
| | 37,1 | 33,6 | 22,6 | 5,45 | 1 | 0,43 | 0,14 | 0,09 | |
| $\mu =$ | −8,1 | −6,0 | − 4,6 | − 2,2 | 0 | — | — | 3,0 | 5,2 |
| | −7,4 | −6,1 | − 5,4 | − 3,0 | 0 | 1,5 | 3,4 | 4,4 | — |
| $\mu_1 =$ | −2,0 | −0,4 | + 0,6 | 3,0 | 5,5 | 6,0 | 9,0 | 10,0 | 11,8 |
| | −1,4 | +0,8 | + 1,5 | 3,5 | 5,5 | 6,0 | 7,6 | 10,0 | — |

Les valeurs $T : T_1$ sont celles des températures rapportées à celle du Soleil. La première ligne correspond aux nombres de Saha, qui prend $T_1 = 7000$ et la seconde ligne aux nombres de Wilsing et Scheiner avec $T_1 = 5200$. On voit que si les températures de base sont assez différentes leur rapport est en général assez voisin, ce qui donne plus de poids aux calculs, qui sont basés uniquement sur ces rapports.

Les valeurs des masses moyennes $M : M_1$ de chaque type spectral, par rapport au Soleil, données dans les deux lignes suivantes, ont été calculées au moyen de la formule (26). Elles concordent bien avec ce que l'on sait des masses des étoiles [1].

[1] H. Seares. The masses and densitees of the stars. (*Contribution*

Les deux lignes suivantes donnent la différence de grandeur $\mu$ avec le Soleil à la même distance, calculée par la formule (27).

Les deux dernières lignes établissent la comparaison entre le calcul et l'observation. La première ligne donne la moyenne des deux résultats précédents $\mu_1$ en rapportant les distances à 10 parsecs et en prenant 5,5 pour les $G_0$. La dernière ligne donne les valeurs moyennes des observations et données statistiques [1]. La concordance est très satisfaisante quant on songe que les données relatives aux températures et aux statistiques sont récentes et ne donnent qu'une première approximation. La concordance avec les données du calcul est du même ordre. Elle est très satisfaisante, quand on songe que les formules tiennent compte de tout le temps de la formation et de l'évolution des étoiles.

M. Seares (*loc. cit.*) montre que les observations s'accordent également bien avec les formules déduites par Eddington, de la loi des gaz parfaits et de la pression de radiation, entre les masses et les températures, au

*from*, *Mt. Wilson obs.* N° 226 et *Astrophys. Journal*, t. 55, 1922, donne une nouvelle détermination générale des masses d'après le type spectral. Des calculs plus précis, en seconde approximation, en tenant compte des effets accessoires, permettent de serrer ces résultats de plus près. Les masses *moyennes* varient de 10 pour les $B_0$ à 0,56 pour les $M_2$.

[1] D'après Jackson et Furner, *Monthly notices*, t. 81 (1920) Adams, *Astrophs Journal* (1921) et A. Danjon *L'Astronomie* (1921), p. 415 Les valeurs $\mu_1$ sont à diminuer de 5 unités si on les rapporte à 1 parsec. On retrouverait à peu près les valeurs de $\mu$. Voir aussi « On the relation betwen absolute magnitude and spectral class. K. Lundenmarck et W. J. Luyten, *Astron. J*, t. 35, N° 828, 1923.

moins pour les géantes[1]. Ceci montre une fois de plus que la concordance d'une formule ou d'une théorie avec les faits n'en est pas une légitimation suffisante, car si les relations établies ne s'étaient pas maintenues dans l'évolution et la formation, comme on l'a établi ci-dessus, elles n'auraient actuellement aucun sens et ne ne seraient pas vérifiables. Les relations établies par EDDINGTON sont complètement indépendantes de la formation et de l'évolution. Elles ne dépendent que de l'hypothèse sur la constitution physique de l'équilibre radiatif. Elle devraient donc être éternelles. Si elles cadrent avec les faits, c'est qu'EDDINGTON a déterminé précisément la valeur des paramètres exprès pour cela, en leur donnant des valeurs « astronomiques », exigées par l'astronomie. Ces relations, entre les masses et les températures, doivent évidemment dépendre de l'évolution passée, autrement elles n'auraient pas de sens.

10. **Evolution stellaire et données statistiques sur la répartition des étoiles.** — On sait que les étoiles se répartissent assez uniformément autour du Soleil, jusqu'aux grandeurs 6 et 7 sauf, cependant pour les étoiles B., A., F, surtout les B. Pour les étoiles plus faibles, elles se concentrent très rapidement et de plus en plus complètement au voisinage du plan de la Voie lactée.

On en conclut que la *densité stellaire* diminue beaucoup plus vite dans une direction normale au plan galactique, que dans ce plan lui-même. D'après KAPTEYN

[1] EDDINGTON a refait également le calcul dans *Monthly notices*, t. 83 p. 28, (1922).

la distance des surfaces d'égale densité serait 6 fois plus rapprochée dans la direction des pôles galactiques que sur l'équateur.

Mais on suppose alors, et c'est l'hypothèse la plus simple, qui ne donne qu'une première approximation, peut-être très lointaine, que la grandeur moyenne des étoiles est la même à toute distance. Cette grandeur moyenne est évaluée par Kapteyn à 2,7 rapportée à 1 parsec, ou 7,7 à 10 parsecs. D'après le tableau ci-dessus, ceci indiquerait que la *masse moyenne* des étoiles doit-être plus faible que celle du Soleil, égale environ à 1/3 ou 1/6 de celle ci, puisque cette moyenne est dans les étoiles K.

Pour essayer de voir ce que donnerait une seconde approximation, supprimons l'hypothèse simplificatrice ci-dessus. Admettons que la grandeur moyenne des étoiles varie d'un endroit à un autre. Cette grandeur moyenne dépendra de la masse moyenne seule, si les conditions d'évolution sont supposées les mêmes.

Or, une augmentation de 4 grandeurs correspond à une distance de 6,31 fois plus grande. Il suffit donc que la grandeur moyenne des étoiles varie de 4 grandeurs, normalement au plan de la Voie lactée, pour donner à notre Univers l'apparence d'un ellipsoïde aplati où le plus grand diamètre est égal à 6 fois le petit.

De plus, cette variation de 4 grandeurs *correspond à une variation de* 10 *fois la masse moyenne*. Il suffira d'admettre que la masse moyenne des étoiles est égale à deux fois celle du Soleil au voisinage du centre ou du plan galactique, C'est la moyenne des masses directement mesurées qui sont naturellement les plus fortes. Puis cette masse moyenne se réduit à 1/5 ou 1/10 de celle du Soleil à

la limite observable. La grandeur moyenne générale serait alors 2,7 (ou 7,7 à 10 parsecs, KAPTEYN) et correspondrait aux étoiles de type K.

Enfin cette réduction de la masse moyenne de 10 fois suppose simplement que les centres d'attraction primitifs, qui ont formé les étoiles au sein de la nébuleuse indéfinie, étaient environ 2 fois plus près l'un de l'autre au bord de la Voie Lactée qu'au centre. La matière contenue dans leur sphère d'action, et attirée, était ainsi 8 à 10 fois moindre. *Il a donc suffi que, dans la nébuleuse primitive la distance moyenne des centres d'attraction ait varié seulement de 1 à 2 sur une distance de 100.000 années de lumière*, pour donner à l'Univers visible, voisin de nous, toutes les apparences de la Voie Lactée.

Dans cette hypothèse la densité stellaire, ou la densité de la matière stellaire, serait bien encore partout la même, comme celle de la nébuleuse originelle, mais la visibilité des étoiles formées ne serait plus la même, en tous les points de l'espace. Plus loin encore, sur les bords de la Voie Lactée, l'évolution serait plus avancée et les étoiles déjà groupées en amas condensés. Mais alors les calculs des distances de ces amas, basés sur l'analogie des conditions dans ces amas et autour du Soleil (SHAPLEY, CURTIS) auraient peut-être besoin d'être remaniés. Ils constituent du moins la première approximation.

On peut faire encore l'hypothèse que l'évolution astronomique, qui dépend de l'évolution et de la formation des atomes, n'a pas commencé partout en même temps. On a vu qu'une étoile comme le Soleil mettra 50 millions d'années pour baisser de 4 grandeurs. Il suffit d'admettre que l'évolution cosmique aux extrémités de notre Univers a commencé 50 millions d'années avant celle de la ré-

gion de la Voie Lactée pour expliquer les apparences observées.

Enfin on a vu qu'en variant la densité du milieu, ou la masse primitive des centres d'attraction, on pourrait allonger ou raccourcir le temps total d'évolution.

Il est probable que ces différentes causes ont agi à la fois pour introduire des différences dans l'évolution des astres. Il est difficile de dire laquelle a été prépondérante. Celle d'*une simple différence dans les masses moyennes* paraît la *plus simple*, en tous cas *suffisante* pour expliquer les apparences actuelles.

## CHAPITRE X

### ÉTUDE DE LA FORMATION ET DE L'ÉVOLUTION DES SYSTÈMES STELLAIRES. AMAS STELLAIRES, ÉTOILES NOUVELLES. ÉTOILES GÉANTES. NÉBULEUSES SPIRALES.

L'attraction, qui a concentré en étoiles la matière dispersée dans l'espace, a continué son action pour concentrer ces étoiles en amas, pour réunir parfois deux étoiles en une seule, ou même deux amas en un seul. Nous allons étudier ici les différents phénomènes produits par la continuation de cette action, les conditions de formation, d'équilibre et d'évolution des différents systèmes stellaires, qui peuvent être ainsi formés, nous étudierons les différents calculs faits sur ce sujet et leurs principaux résultats.

En vertu de cette idée préconçue, que l'Univers astronomique existe de toute éternité, on en avait conclu d'abord que notre système d'étoiles ou Voie Lactée devait avoir atteint un état d'équilibre stable ou permanent, c'est-à-dire où les vitesses des étoiles étaient réparties au hasard, comme pour les molécules d'un gaz. Le calcul et les observations (courants d'étoiles) ont montré qu'il n'en était rien, que c'était plutôt un système en formation, plus voisin peut-être de l'état initial que de l'état final.

Il en est de même pour les amas d'étoiles, on les a trop étudiés dans la seule hypothèse d'un équilibre permanent

alors que ce sont probablement aussi des systèmes en voie de formation ou de concentration.

Du moins ces calculs étaient nécessaires pour confronter la théorie et les observations.

1. **Constitution de l'Univers stellaire.** — Depuis Halley, tout notre Univers stellaire est rattaché à la Voie Lactée. L'ensemble des étoiles forme un amas aplati, irrégulier, dont les projections sur le ciel donnent les apparences connues. On a dressé la carte du ciel pour les étoiles de différentes grandeurs. Pour les étoiles les plus brillantes, jusqu'à la 7e et 9e grandeur, les plus voisines par conséquent, elles sont réparties à peu près uniformément autour de nous. Les étoiles plus faibles, au contraire, se concentrent de plus en plus nombreuses au voisinage du plan de la Voie Lactée et constituent sa traînée blanchâtre, irrégulière (Stratonoff, etc.). Dans le plan de la Voie Lactée il y aurait un maximum de condensation dans la direction du Sagittaire (Plummert, Nort. *M. N.* 1917, 1918). Ce serait le centre de la Voie Lactée à 500 parsecs environ. Les étoiles de 16e grandeur seraient de 3 à 11 fois plus nombreuses dans la Voie Lactée qu'au Pôle (Chappman, Rhijn, Seares, Kapteyn).

Connaissant la répartition apparente on a pu essayer de se rendre compte de leur répartition réelle au moyen de différentes hypothèses. La loi de Pogson, qui relie les grandeurs et les intensités, permet d'écrire

$$(1) \qquad g - G = \frac{5}{2} \log \frac{I}{i} \qquad \frac{I}{i} = \frac{R^2}{r^2} e^{-ar}$$

G étant la grandeur correspondant à l'intensité I, à la

distance R et $a$ le coefficient d'absorption. On en déduit la grandeur apparente $g$ à la distance $r$

$$(2) \qquad g = G + 5 \log \frac{r}{R} + \frac{5}{2} ar \log e$$

Si l'absorption est négligeable, si la densité et la grandeur des étoiles est la même, le nombre des étoiles plus brillantes qu'une certaine grandeur devrait être près de 4 fois plus grand que celui de la grandeur au-dessous, loi de Schiaparelli. On aurait en effet dans ce cas,

$$(3) \quad 5 \log \frac{r}{R} = 1 \qquad \frac{r}{R} = 1{,}585 \qquad \frac{n}{N} = \frac{r^3}{R^3} = 3{,}98$$

Le rapport du nombre d'étoiles est toujours au-dessous de ce nombre et décroît rapidement. Kapteyn a déterminé la répartition des étoiles dans l'hypothèse où leur grandeur absolue serait la même, ou du moins répartie au hasard autour d'une moyenne. Il trouve alors que les surfaces d'égale densité affecteraient la forme d'ellipsoïdes aplatis suivant le plan de la Voie Lactée, le petit axe de l'ellipsoïde étant, pour les plus faibles étoiles, 6 fois plus petit que le grand axe. Il en déduit également la loi de répartition des grandeurs absolues, loi des luminosités, le maximum serait à la grandeur 7,7 pour une distance de 10 parsecs. La plupart des étoiles auraient, comme éclat, trois grandeurs de plus que celle du Soleil (4,85). Halm explique également les apparences en supposant que la grandeur absolue moyenne diminue avec la distance. (*M. N.* 1917). D'après d'autres considérations, l'absorption ne paraît pas jouer un rôle considérable.

On peut dire que le système stellaire de la Voie Lactée comprend l'ensemble des étoiles, formant un vaste amas ellipsoïdal irrégulier. On a cru d'abord que cet amas

était arrivé à un état d'*équilibre permanent*, ou *état final*, où les vitesses des étoiles seraient distribuées au hasard, comme pour les molécules d'un gaz dans la théorie cinétique (lord Kelvin). Poincaré a montré déjà qu'il n'en est pas ainsi, *équilibre provisoire*. Toutes les découvertes modernes tendent à montrer que la Voie Lactée est *plutôt voisine de l'état initial* que de l'état final.

Kapteyn, en étudiant les mouvements propres des étoiles, dans différentes régions du ciel, a trouvé qu'elles se dirigeaient toutes de préférence suivant deux directions opposées. Il en a conclu que toutes les étoiles constituent *deux courants* entremêlés. On en a séparé ensuite les étoiles B, qui formeraient un troisième courant, ou plutôt qui seraient en repos relatif. Schwarzschild a déduit des faits qu'il y avait, non pas deux courants, mais seulement deux directions préférentielles opposées, suivant lesquelles les vitesses des étoiles étaient généralement plus grandes que dans les autres directions (loi ellipsoïdale des vitesses), et cette interprétation paraît plus simple.

Les vitesses des étoiles, dans la Voie Lactée, ne sont donc pas distribuées au hasard. On a retrouvé d'ailleurs plusieurs groupes d'étoiles (Grande Ourse, le Taureau et les Hyades, les Pléïades, Persée, etc.) ayant le même mouvement d'ensemble et le même apex (Kapteyn, Boss). On en a fait des courants parallèles, analogues aux essaims d'étoiles filantes. Le calcul montre que les apparences sont les mêmes en les regardant comme des amas convergents ayant une vitesse de translation commune et une vitesse de concentration faible, c'est-à-dire des amas en formation, voisins de l'état initial. D'ailleurs un ensemble d'étoiles, ayant mêmes vitesses, est au repos relatif, et se concentrera nécessairement.

Cette concentration des amas est à peine amorcée dans la Voie Lactée. On n'y trouve que des *amas ouverts*, c'est-à-dire très peu condensés. On reconnaît de plus en plus que les étoiles de la Voie Lactée sont groupées ainsi en amas assez lâches ou nodosités. Ceci explique suffisamment qu'il y ait des trous dépourvus d'étoiles, appelés *sacs à charbon*. On a voulu les expliquer par des masses absorbantes, nébuleuses obscures (Hagen). Récemment la photographie a montré dans ces trous l'existence d'étoiles faibles plus éloignées. Ce sont bien de simples trous entre les amas.

Les amas plus condensés, *amas globulaires*, se trouvent tous sur les bords de la Voie Lactée, à droite et à gauche, à des distances de nous de 10.000 à 100.000 parsecs, (Shapley, Curtis). La vitesse radiale de ces amas est très grande, de l'ordre de 100 km. : sec, et dirigée vers la Voie Lactée. Ils en font bien partie.

En dehors de la région des étoiles, bordée par celle des amas, et qui forme le système de la Voie Lactée, se trouve la région des *nébuleuses spirales*, au nombre d'un million et toutes en dehors de notre système. Le spectre est celui des amas, leur vitesse est du même ordre, même plus grande, mais dirigée à l'opposé de la Voie Lactée. Elles ne font pas partie de notre système. Elles semblent constituées par des amas plus condensés encore que les globulaires, et dont les étoiles individuelles seraient pour la plupart invisibles. Elles résulteraient de la rotation de deux amas, formant un système analogue aux étoiles doubles.

2. **Conditions mécaniques d'un amas d'étoiles.** — Si un amas est arrivé à l'état d'équilibre permanent

il doit réaliser la condition du viriel (POINCARÉ, p. 31).

$$(1) \qquad 2T + V = 0 \qquad 2T = W \qquad T = \frac{1}{2}W$$

T est l'énergie cinétique de l'ensemble, V le viriel de CLAUSIUS qui est ici égal et de signe contraire à l'énergie potentielle W du système. On voit que, pour réaliser l'équilibre permanent, les étoiles d'un amas ont dû perdre, par les frottements ou par les chocs, la moitié de l'énergie totale fournie par le travail de concentration de l'amas. Ce serait extrêmement long. On montre que les chocs seraient extrêmement rares. Dans un milieu indéfini où tous les éléments posséderaient une certaine vitesse, une certaine énergie cinétique, la concentration d'une partie ne pourrait se produire que si ses dimensions sont assez considérables pour que W dépasse 2 T.

Cette formule montre également que la concentration des amas, après celle des étoiles, doit fournir une somme d'énergie bien supérieure à celle fournie par la condensation des étoiles. Si nous considérons ensuite la condensation des amas d'amas, nous voyons que la gravitation suffit pour engendrer indéfiniment l'énergie dans le monde en créant indéfiniment des systèmes nouveaux, sans jamais tourner dans le même cercle. C'est la *vie éternelle de l'Univers*.

L'équilibre permanent est *parfait* si la condition du viriel est réalisée en chaque point de l'amas, comme pour l'ensemble. Les conditions à la surface exigent alors que les trajectoires soient toutes circulaires.

EDDINGTON a étudié dans le cas général quelle devait être la répartition des vitesses pour que la densité soit

uniforme (M. N. t. 73 et 75). En comparant les étoiles aux molécules des gaz on a étudié aussi les conditions qui correspondent à l'équilibre isotherme ou à l'équilibre adiabatique. (JEANS. M. N. 1916-1922).

POINCARÉ à démontré, comme pour les gaz, qu'il y aurait équipartition de l'énergie dans le cas de l'équilibre permanent (p. 35), démonstrations reprises par EDDINGTON, CHARLIER, PARVULESCO. Ceci suppose que l'action des perturbations individuelles l'emporte sur l'attraction de l'ensemble, qui tend à donner aux étoiles des vitesses indépendantes de leurs masses [1].

ZEIPEL, PLUMMER, PARVULESCO, ont étudié les formules qui permettent de déduire la loi de répartition réelle des étoiles dans l'amas d'après leur répartition sur les clichés, c'est-à-dire sur un plan. On trouve toujours une forte concentration, de l'ordre de l'inverse du carré de la distance. (*An. Obs. Paris*, 25, et C. R., t. 144 ; — M. N. t. 21 ; — *Thèse*, 1925.

L'hypothèse de l'équilibre permanent permet de calculer les vitesses moyennes au centre, ou aux différents points. Ces vitesses devraient être appréciables. Aucun amas ne manifeste ces vitesses internes. Rien ne nous permet de conclure qu'ils sont à l'état d'équilibre permanent ou final. Tout indique au contraire qu'ils sont en train de se concentrer et plutôt voisins de l'état

[1] SEARES a cru retrouver la loi d'équipartition pour les étoiles de la Voie Lactée, mais il donne seulement les logarithmes de la force vive, qui varient de 3,21 pour les $B_5$ à 3,66, pour les $G_5$, soit de 0,41 ou de un dixième. Mais ce logarithme 0,41 correspond à une force vive *trois fois* plus grande (exactement 2.82) pour les étoiles *G*. On ne peut pas parler d'équipartition, même approchée. (*Astroph. J.* t. 55. 1912).

initial. Toutes les déductions basées sur l'équilibre permanent ne valent pas plus que cette hypothèse, comme par exemple la déduction de CHARLIER et JEANS que l'âge des étoiles dépasse $10^{14}$ ans (SHAPLEY, *Scientia*, 1925).

On étudiera dans les numéros suivants les conditions introduites par l'état initial ou de formation, plutôt que par l'état final ou permanent, ces conditions de l'état initial étant moins connues et plus suggestives.

Si on applique les lois d'attraction à un amas d'étoiles en formation, plongé dans un autre milieu, comme la Voie Lactée, le calcul montre que l'amas doit s'aplatir dans la direction de l'attraction. Dans un ellipsoïde aplati, comme la Voie Lactée, les amas d'étoiles doivent tendre à s'aplatir normalement à ce plan. C'est bien ce qu'on observe, et ceci ne prouve nullement qu'ils ont un mouvement de rotation. Pour un amas de particules cométaires soumises à une attraction extérieure, ROCHE, SCHIAPARELLI, avaient montré que cet essaim s'allonge, et se disperse, dans la direction de l'attraction. Ici c'est le contraire.

L'attraction dans la Voie Lactée tendra donc à donner aux étoiles et aux amas des mouvements parallèles au plan de la Voie Lactée et des vitesses plus grandes dans deux directions opposées, qui sont celles de l'aplatissement. Nous retrouvons bien là la loi ellipsoïdale des vitesses de SCHWARZSCHILD et l'explication des apparences des deux courants de KAPTEYN. En même temps nous voyons ainsi que l'état des vitesses des étoiles de la Voie Lactée est plutôt voisin de l'état initial que de l'état final.

**3. Concentration d'un amas isolé, sphérique ou elliptique, sans conflagration.** — Nous considérons un amas isolé, dont les étoiles sont primitivement immobiles. Nous avons vu qu'une nébuleuse isolée se concentre nécessairement et que le temps d'évolution ne dépend que de la densité moyenne de l'ensemble. Il en sera de même ici, mais la concentration des éléments en étoiles, diminue dans d'énormes proportions la probabilité des chocs et permet de constituer des amas en équilibre sans conflagration.

Supposons d'abord un amas sphérique homogène composé de 10.000 étoiles semblables au Soleil, à une distance moyenne égale à 200.000 fois la distance Terre Soleil. Le temps de concentration serait de 6 millions d'années. Si l'homogénéité était mathématique, elles arriveraient au centre en même temps. Supposons qu'il y ait un flottement de 1/600 seulement, les premières étoiles arriveront au centre au bout 5.990.000 ans, les dernières 10.000 ans après et il en passera seulement une par an au centre, en moyenne.

Si la répartition y est en raison inverse du carré de la distance, on a vu que la masse qui arrive au centre dans l'unité de temps est constante. Le passage au centre sera donc parfaitement régulier, à raison d'une étoile tous les 600 ans. La probabilité des chocs sera infinitésimale. Celles qui ont passé au centre tendront à s'éloigner, pour retourner à la même distance. On aura finalement un ensemble possédant un rayon défini et stable, plus petit que le rayon primitif.

Supposons la figure primitive de l'amas ellipsoïdale, au lieu d'être sphérique. Dans le cas d'une densité homogène l'attraction suivant la normale à chaque plan de symé-

trie est proportionnelle à la distance. Toutes les étoiles arriveront sur l'un des plans en même temps. Elles le traverseront pour se concentrer sur l'un des trois autres plans et ainsi de suite. Il y aura trois périodes d'oscillations combinées, qui donneront des trajectoires gauches, dont les projections sur chaque plan seront des courbes de LISSAJOUS.

Considérons un ellipsoïde de révolution de grand axe $a$. L'attraction X à l'extrémité du grand axe et Y à l'extrémité du petit axe sera, dans le cas d'un faible aplatissement

$$(14) \qquad X = -f\frac{M}{a^2}\left(1 + \frac{3}{5}l^2\right), \qquad 1 + l^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$Y = -f\frac{M}{a^2}\left(1 + \frac{2}{5}l^2\right) = -f\frac{M}{b^2}\left(1 - \frac{3}{5}l^2\right).$$

Dans la contraction l'aplatissement va toujours en augmentant et à la limite, pour un disque aplati, on a les valeurs

$$(15) \qquad X = -\frac{3\pi}{4}f\frac{M}{a^2}, \qquad Y = -3f\frac{M}{a^2}.$$

Ces valeurs, au départ, diffèrent peu l'une de l'autre, $\frac{1}{5}l^2$. Elles varient sensiblement en raison inverse du carré de $a$. On peut les prendre égales entre elles et à $f\frac{M}{a^2}$, en première approximation. On remarque en effet que le temps de chute, sous l'action de la gravitation variable, est presque le même que le temps de chute en conservant

à l'attraction, pendant toute la chute, la même valeur qu'au départ. On a en effet

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r^3}{2f\mathrm{M}}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{2\gamma}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2r}{\gamma}} = \frac{\pi}{4}t_1,$$

$t$ étant le temps de la chute de la distance $r$ sous l'action de la masse M et $t_1$ le temps de chute en supposant l'accélération constante. Le rapport des valeurs est de $\frac{\pi}{4}$, l'écart est moindre que 1/4, alors que les rapports des accélérations varient de 1 à l' $\infty$ ou de 1 à 0.

Ici les rapports des accélérations d'après (14) et (15) varient seulement de 1 à $\frac{\pi}{4}$. Les actions restent sensiblement égales. Les espaces parcourus par les extrémités des deux axes sont sensiblement égaux. La différence des deux axes reste la même. L'ellipsoïde va donc se concentrer sur le plan diamétral, suivant un disque circulaire, dont le rayon sera égal à la différence primitive des axes.

Soit un amas de 10.000 étoiles qui aurait un rayon de 10 parsecs, ou 2.150.000 distances Terre Soleil. En lui supposant un aplatissement de 0,001 seulement, il s'aplatirait suivant un disque de 2.150 unités de rayon et les étoiles y seraient très au large.

4. **Formation des amas dans une nébuleuse indéfinie. Loi de densité d'un amas.** — Pratiquement, les amas, comme les étoiles, se sont formés dans un milieu général, avant de s'isoler et de se concentrer définitivement. Nous avons vu comment les surfaces de densité

maximum et de potentiel minimum pouvaient englober plusieurs centres de condensation d'étoiles, ou même des milliers, et constituer des centres de condensation d'ordre supérieur conduisant aux amas.

Pour simplifier, nous avons supposé la densité partout uniforme, avec en plus des masses supplémentaires $m$ qui constituent les noyaux de formation des étoiles, de masse M. La masse représente celle de l'étoile, et de tout son système de planètes et comètes, dont la masse totale peut être plus considérable, et même de beaucoup, que celle de l'étoile.

Si les masses $m'$ étaient égales et réparties uniformément, les étoiles resteraient en équilibre et il n'y aurait pas condensation en amas. Nous supposerons donc qu'il y a, aux points de concentration des amas, d'autres masses supplémentaires $m'$, qui représentent l'excès de masse renfermée dans la surface de densité minimum, qui limite le domaine de l'amas. La masse totale de l'amas sera M'.

Nous avons vu que la probabilité des chocs, dans la concentration d'étoiles déjà condensées, était extrêmement faible. Il n'y aura pas réunion des étoiles en une seule masse. Elles resteront indépendantes sur des trajectoires indépendantes. Nous aurons un groupe d'étoiles, alors que la concentration d'une étoile donne un Soleil central, des planètes et des comètes.

Chacune des étoiles élémentaires de l'amas sera attirée par la masse $m'$ suivant la même loi, étudiée au chapitre 8e, pour la formation des étoiles. Au bout d'un certain temps la loi de répartition autour du centre y sera la même c'est-à-dire que la *densité des étoiles y variera en raison inverse du carré de la distance au centre*. L'observa-

tion des amas stellaires, révèle des lois de densité qui se rattachent d'assez près à celle-ci.

5. **Temps de formation d'un amas comparé à celui d'une étoile.** — La loi du temps de concentration sera donnée par la même formule que pour la formation d'une étoile

$$(16)\quad t\sqrt{4\pi f\rho} = \text{Log } 3{,}68\frac{M}{m}z = \text{Log } 3{,}68\frac{4}{3}\pi\frac{\rho r^3}{m}\left(1-\frac{x}{r}\right)$$

où $\rho$ est la densité primitive du milieu, la même partout, $m$ la masse attractive supplémentaire, $x$ la distance où se trouvent au temps $t$ les étoiles qui étaient primitivement à la distance $r$, et M étant la masse totale renfermée dans la sphère de rayon $r$. Pour $x = 0$, ou $z = 1$, il y a concentration de la masse M.

Dans un milieu indéfini, où il y aurait d'autres amas limitant le premier, il faudrait multiplier $m$ par

$$\beta = 1 - \frac{r^2}{(2r_0 - r)^2},$$

où $r_0$ serait la distance d'attraction nulle entre deux amas. La correction introduite par $\beta$ ne serait sensible qu'au voisinage de $r_0$. En négligeant la formation de cette couche extrême, ce qui ne modifie en rien la comparaison, on peut prendre la formule générale sous la forme (16).

Si le rapport de la masse supplémentaire $m$, à la masse totale M était en général le même, pour les étoiles et pour les amas, le temps de concentration total, pour $z = 1$, serait le même. Les amas auraient été formés et concentrés à l'état d'équilibre en même temps que

les étoiles. Ils auraient ensuite poursuivi leur évolution depuis le même temps.

Il ne semble pas qu'il en soit ainsi. Dans la Voie Lactée au moins, les étoiles sont en général complètement formées, et la concentration en amas y est à peine amorcée, *amas ouverts*. Sur les confins de la Voie Lactée les amas sont constitués à l'état globulaire, mais ils sont en train de se condenser, plutôt qu'à l'état de concentration définitive. Nous avons vu en effet qu'un amas de 10.000 étoiles aurait un rayon égal à 23,3 fois de la distance du Soleil à la Terre, ce qui serait bien au-dessous des limites de visibilité des plus puissants instruments [1].

Dans la formation type que nous avons considérée au chapitre 8e, la masse *m* était égale à celle de la Terre pour M égal à celle du Soleil, rapport 334.000, nous avons obtenu 21 millions d'années pour la formation du premier millième de la masse et 20 millions pour la formation du reste.

Considérons un amas où le rapport des masses M et *m* soit 10 fois plus grand, l'attraction *relative* correspondant à *m* sera dix fois moindre. Le temps de concentration, calculé d'après (16), sera augmenté de 6,7 millions d'années. Les amas ne seraient condensés que 6,7 millions d'années après les étoiles.

Pour un rapport 100 fois plus grand le temps serait augmenté de 2 fois 6,7 millions d'années et ainsi de

[1] Ces amas étant plus probablement en formation, et non en état d'équilibre permanent, il faut noter ici qu'on ne peut pas en déduire que l'évolution stellaire a exigé des périodes immensément longues.

suite. Le temps total serait doublé pour un rapport 10.000 fois plus grand.

En prenant un rapport plus petit on aura une formation plus rapide que celle des étoiles, dans le même rapport. Ce sera le cas des météorites, qui se sont formées avant les étoiles.

6. **Concentration comparée d'un amas et d'une étoile.** — La formule (16) montre que, pour la même période de temps, on a, pour deux systèmes en formation

$$\frac{M}{m}\left(1-\frac{x}{r}\right)=\frac{M'}{m'}\left(1-\frac{x'}{r'}\right). \tag{17}$$

Appliquons le premier membre à la formation d'une étoile de l'amas, on aura $x=0$, à la fin de la formation. Si le rapport de M' à $m'$ correspondant à l'amas était 10 fois plus grand que celui correspondant à l'étoile, on aura $x'=0{,}9r'$. Les éléments extrêmes de l'amas n'auront parcouru que le dixième de la distance au centre, au moment où les étoiles de l'amas seront complètement formées. Notre amas type de 10.000 étoiles au rayon primitif de 10 parsecs, aurait eu encore un rayon de 9 parsecs à la fin de la formation des étoiles du même milieu. Ceci correspond assez bien à l'état des amas globulaires en regardant comme récente, relativement, la formation des étoiles.

Si le rapport des masses M' et $m'$ était 100 fois plus grand, le rayon primitif de notre amas n'aurait diminué que de un centième. Les distances moyennes des étoiles seraient à peine modifiées. La formation de l'amas serait à peine amorcée. On aurait un amas ouvert.

La formule (17) peut encore s'écrire

$$\frac{r^3}{m}\left(1-\frac{x}{r}\right)=\frac{r'^3}{m'}\left(1-\frac{x'}{r'}\right). \tag{18}$$

Si l'on suppose encore $x = 0$, moment final de la formation d'une étoile, et de plus $x' = 0$, on obtient la distance $r'$, où se trouvaient primitivement les étoiles de l'amas, qui arrivent au centre de l'amas à ce moment là. On a

$$r'^3 = r^3\frac{m'}{m} = nr^3\frac{M}{m}\frac{m'}{M'}, \qquad M' = nM,$$

$n$ étant le nombre d'étoiles de masse M contenues dans l'amas. On obtient $r'$ en fonction du rapport des masses. Si le rapport correspondant à l'amas M' : $m'$ est 10 fois plus grand que celui correspondant à une étoile et si $n = 10.000$, on a $r' = 10r$. Il y aura donc eu condensation dans l'amas de toutes les étoiles situées à 10 rayons moyens, ce qui correspond à 1.000 étoiles. On aura donc condensation du dixième de la masse, pour un rapport 10 fois plus grand des masses primitives, ce qui est donné d'ailleurs directement par la formule (17).

7. **Cas du plan indéfini. Voie Lactée.** — Pour un amas comme pour une étoile nous avons supposé une seule masse attractive supplémentaire $m$. Il peut y en avoir plusieurs formant une sphère, ou un ellipsoïde. Dans ce dernier cas nous avons vu que l'attraction n'est pas la même suivant les 3 axes. L'amas résultant serait également un ellipsoïde aplati.

A la limite on peut le considérer comme un plan.

C'est presque le cas de la Voie Lactée. L'attraction d'une couche plane, de densité $\rho$, d'épaisseur $e$ serait donnée, à l'extérieur, par la formule

(19) $\qquad F = 2\pi f\rho e \qquad$ et $\qquad F = 4\pi f\rho x$

à la distance $x$ de son milieu pour un point intérieur. La force F à l'intérieur est *constante* et dirigée normalement à la couche. Cette attraction étant constante ne modifierait pas l'homogénéité du milieu.

A la surface de la couche elle est les quatre tiers de celle d'une sphère de même diamètre que l'épaisseur de la couche.

Le temps de contraction de la couche sur le plan médian serait indépendant de l'épaisseur $e$ et donné par

$$\frac{d^2x}{dt} = 2\pi f\rho e = C^{te}, \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2\pi f\rho}}.$$

Le temps de contraction d'une sphère homogène serait donné par la même expression multipliée par $\frac{3\pi}{4}$.

Les résultats seraient sensiblement les mêmes dans le cas d'une sphère, ou d'un plan, mais ici il y aurait condensation dans une seule direction, celle normale au plan.

8. **Vitesses comparées des étoiles et des amas.** — Nous pouvons considérer enfin un groupe d'amas, formant un ensemble, comme la Voie Lactée. La concentration se fera de la même façon, mais probablement avec un certain retard, comme la concentration des amas était en retard sur celle des étoiles, car à mesure que l'on prend un ensemble plus grand la densité s'écarte

moins de la moyenne d'après le calcul des probabilités.

On peut comparer alors les vitesses acquises par les éléments correspondants dans les deux cas. On a vu qu'au bout d'un certain temps, quand la condensation est amorcée, la vitesse d'un élément peut s'exprimer par la formule

$$v^2 = \frac{8}{3}\pi f\rho\frac{r^3}{x} = \mathrm{K}r^2\frac{r}{x} \qquad (20)$$

$r$ étant la distance où se trouvait primitivement l'élément considéré de son centre d'attraction, $x$ la distance où il se trouve, $\rho$ la densité du milieu, qui est la même.

Pour les éléments d'une étoile, les étoiles d'un amas, ou les amas d'un ensemble, qui sont au même état de concentration on aura la même valeur de $x : r$. Dans le cas général sa valeur sera donnée par (17). La vitesse est alors proportionnelle à la distance $r$.

On peut écrire pour deux amas quelconques, $r_1$ et $r'_1$ étant le rayon total et $n$, $n'$ le nombre d'étoiles dans chacun

$$\frac{v'}{v} = \frac{r'}{r} = \frac{r'_1}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{n'}{n}}. \qquad (21)$$

La vitesse de deux étoiles occupant la même position relative dans deux amas est proportionnelle à la racine cubique du nombre d'étoiles dans chaque amas. Elle sera 2,15 fois plus grande dans un amas contenant 10 fois plus d'étoiles.

Dans un ensemble de mille amas, la vitesse d'un amas sera dix fois plus grande que la vitesse d'une étoile d'un amas, par rapport à son centre, le rapport $x : r$ étant le même pour l'étoile et pour l'amas. Si celle de l'étoile est de 20 kilomètres, celle de l'amas sera de

200 kilomètres par seconde. On retrouve ainsi les vitesses observées pour les amas par rapport à celles des étoiles.

9. **Cas du choc direct de deux étoiles. Etoiles nouvelles.** — Nous avons exclu le choc direct de deux étoiles dans la formation des amas. Etudions-le maintenant pour voir comment on peut l'appliquer à l'explication des étoiles nouvelles.

Procédons comme pour les amas. Soit $m$ et $m'$, $r$ et $r'$ les masses et les rayons de nos deux étoiles, M et R la masse et le rayon résultant. Supposons la densité uniforme à l'intérieur. L'énergie résultante sera égale à l'énergie maximum de concentration [1] diminuée de l'énergie dépensée auparavant dans la formation des deux étoiles,

$$(22) \qquad E' = E - e - e' = \frac{3}{5} f\left(\frac{M^2}{R} - \frac{m^2}{r^2} - \frac{m'^2}{r'^2}\right).$$

L'énergie résultante sera maximum si les masses $m$ et $m'$ sont égales, d'où l'on tire

$$(23) \qquad E' = 2\frac{3}{5} f \frac{m^2}{r}\left(2\frac{r}{R} - 1\right), \qquad M = m + m' = 2m.$$

Il y aura encore maximum si la concentration en une seule masse se faisait, à la même température $T_1$, et sans dilatation. On aurait alors

$$(24) \qquad R^3 = 2r^3 \qquad \text{et} \qquad E' = 1{,}18\, e.$$

[1] Nous ne considérons que la force vive due à l'attraction des éléments, car nous ne connaissons aucun canon capable de lancer les étoiles comme des obus. Nous n'avons donc pas le droit de leur donner des vitesses arbitraires. Toutes les vitesses doivent sortir de nos formules et s'expliquer par l'action de forces connues.

L'énergie résultante du choc est un peu supérieure à l'énergie de formation de chacun des astres.

Cette énergie, donnée par (23) doit être positive, d'où l'on tire

$$R < 2r. \tag{25}$$

Le rayon de l'astre résultant ne peut pas dépasser le double du rayon de l'un des astres primitifs. Si on désigne par $D_1$ et D la densité des composantes et de la résultante, on aura par égalité des masses

$$2D_1 r^3 = DR^3, \qquad D_1 < 4D.$$

La densité résultante est plus grande que le quart de la densité moyenne primitive.

Or, on a vu dans l'étude de la constitution physique des astres que la densité intérieure du noyau était sensiblement uniforme et égale à la densité limite du gaz à cette température. De plus, cette densité varie probablement en raison inverse de la température, ce sera exact du moins en première approximation. On aura donc finalement

$$T < 4T_1, \qquad DT = D_1T_1. \tag{24}$$

La température résultante sera inférieure au quadruple de la température primitive [1]. Si l'on considère deux masses égales au Soleil, la température résultante sera inférieure à 24.000 degrés.

La variation de grandeur sera donnée par la formule

$$g_1 - g = \frac{5}{2}\log\frac{1}{I_1} = \frac{5}{2}\log\frac{R^2T^4}{2r^2T_1^4} < \frac{5}{2}\log 2.4^4 \tag{25}$$

[1] La température dont il s'agit est la température interne, mais la température effective externe lui est proportionnelle et la première ne dépasse pas le double de la seconde, d'après l'étude de la constitution physique.

Elle serait dans tous les cas inférieures à 6,77 grandeurs, alors que la variation d'éclat de beaucoup d'étoiles nouvelles dépasse 10 grandeurs.

Enfin on a vu que la chute de température est proportionnelle à la 18e puissance du rayon d'un astre. Elle serait ici 260.000 fois plus rapide que pour le Soleil, où elle est de 0,02 pour 100.000 ans. La chute sera ici de 0,052 par an. La formule (25), où R est proportionnel à $T^{1/3}$ d'après (24), donne pour la variation de grandeur par rapport à celle de la température

$$(26) \qquad g_1 - g = \frac{5}{2} \log \frac{R^2 T_1^4}{R_1^2 T_1^4} = \frac{5}{2} \log \frac{T^{14/3}}{T_1^{14/3}},$$

$$\delta g = -\frac{5}{2} \frac{14}{3} \frac{\delta T}{T}$$

On obtient une variation de grandeur $\delta g$ de 0,61 par an, en remplaçant $\delta T/T$ par 0,052.

La variation de grandeur dans les étoiles nouvelles est beaucoup plus rapide que cela. *Il faut que la modification de l'astre soit beaucoup plus superficielle que dans le cas de la fusion totale de deux astres.*

10. **Choc tangentiel et échauffement superficiel.** — Etudions alors le cas d'une masse faible $m$ rencontrant, plus ou moins tangentiellement, une masse beaucoup plus grosse M, et se répandant à sa surface pour la recouvrir d'une couche de faible épaisseur mais élevée à haute température par le choc.

La fusion superficielle répartit la chaleur produite sur une masse $k$ fois plus grande que $m$. La dilatation donne à cette couche une épaisseur $x$. Nous la supposerons élevée à une température uniforme T (température

moyenne). L'énergie produite par $m$ est absorbée par $km$ et par sa dilatation de l'épaisseur $x_1$ à $x$, on a (R rayon de la grosse masse, A équivalent de la calorie),

$$(27) \qquad f\frac{m\mathrm{M}}{\mathrm{R}} = kmc\mathrm{A}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_1) + \frac{1}{2}f\frac{km\mathrm{M}}{\mathrm{R}}\frac{x}{\mathrm{R}}.$$

En appelant $\rho_1$ et $\rho$, $\mathrm{T}_1$ et T, la densité et la température de la couche, avant et après le choc, on a pour les hautes températures

$$(28) \qquad \frac{x}{x_1} = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_1}.$$

On a encore

$$km = 4\pi\rho\mathrm{R}^2x_1 = 3\mathrm{M}\frac{x_1}{\mathrm{R}}, \qquad \frac{x}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_1}\frac{km}{3\mathrm{M}}.$$

Portons cette dernière valeur dans (27) en négligeant $\mathrm{T}_1$ devant T, le second membre pourra s'écrire.

$$(29) \qquad mkf\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_1}\left(\frac{km}{6\mathrm{M}} + c\mathrm{A}\mathrm{T}_1\frac{\mathrm{R}}{f\mathrm{M}}\right).$$

Si on prend M correspondant au Soleil, $m = 0{,}001$ M ou un millième de la masse du Soleil, la masse d'une grosse planète comme Jupiter, on voit que le second terme est la moitié du premier pour $c = 1$ maximum et $k = 1$ minimum. Comme $c$ la capacité calorifique serait plutôt voisine de 0,1, comme $k$ sera de l'ordre de 10, on voit que le second terme est négligeable devant le premier, de l'ordre du centième. Cela revient à dire que la chaleur absorbée par l'élévation de température n'est que la centième partie de celle absorbée par la dilatation de la couche.

La formule (27) se simplifie alors et donne

$$\frac{k\,x}{2\,\mathrm{R}} = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_1} = \frac{6\mathrm{M}}{k^2 m}. \tag{30}$$

On obtient la température résultante T par rapport à la température primitive $T_1$.

La variation de grandeur serait donnée, à partir de la grandeur primitive, par la formule,

$$g_1 - g = \frac{5}{2}\log\frac{\mathrm{T}^4}{\mathrm{T}_1^4} = 10\log\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_1}. \tag{31}$$

L'augmentation de grandeur, après le maximum d'éclat, sera,

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{10\,d\mathrm{T}}{\mathrm{T}\,dt}. \tag{32}$$

Il faut calculer la *vitesse du refroidissement* $\frac{d\mathrm{T}}{dt}$.

La chaleur rayonnée est entretenue par la contraction de la couche $x$. On a

$$\frac{1}{2}f\frac{km\mathrm{M}\,dx}{\mathrm{R}\;\mathrm{R}} = \mathrm{Q}'_1\frac{\mathrm{T}^4}{\mathrm{T}_1^4}dt \tag{33}$$

$\mathrm{Q}'_1$ est la quantité de chaleur rayonnée primitivement par l'astre à la température $T_1$. Or, d'après (28) la température est proportionnelle à $x$. On pourra écrire (33)

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} = \frac{\mathrm{Q}'_1}{\mathrm{E}}\frac{\mathrm{T}^5}{\mathrm{T}_1^4}, \qquad \mathrm{E} = \frac{1}{2}f\frac{km\mathrm{M}}{\mathrm{R}}\frac{x}{\mathrm{R}}. \tag{34}$$

E est l'énergie absorbée par la dilatation de la couche $x$ et qui sera dispersée peu à peu par le rayonnement.

Désignons par $E_1$ l'énergie totale de formation de l'astre M, nous aurons

$$(35) \qquad \frac{1}{T_1}\frac{dT}{dt} = \frac{3}{5}\frac{Q_1'}{E_1}\frac{M}{m}\left(\frac{T}{T_1}\right)^5 = \frac{1}{2}\frac{Q_1'}{E_1}\frac{6^6}{5k^{10}}\left(\frac{M}{m}\right)^6,$$

$$E_1 = \frac{3}{5}f\frac{M^2}{R}.$$

$\frac{Q_1'}{E_1}$ représente la vitesse de refroidissement de l'astre M avant le choc. Prenons une étoile semblable au Soleil, on a vu que la vitesse de refroidissement est actuellement de 0,02 en 100.000 ans.

On voit que la vitesse de refroidissement peut s'exprimer en fonction du rapport des masses et des températures, indépendamment de $k$, d'après (35)

Nous considérons une masse $m$ égale au millième de M. dont la température initiale $T_1$ était de 6.000 degrés, comme le Soleil.

Pour $k = 10$, la température s'élève de 60 fois sa valeur, à 360.000 degrés. La variation de la grandeur est de 17,8. Elle augmente ensuite de 3,63 grandeurs par heure. La variation serait trop grande et trop rapide. La température ne doit pas s'élever si haut pour les étoiles nouvelles.

Pour $k = 20$, la température est multipliée par 15, soit 90.000 degrés. La variation de la grandeur est de 11,8. Elle augmente ensuite de un tiers de grandeur par jour. Ces données correspondent assez bien aux observations des étoiles nouvelles. La température maximum probable serait de l'ordre de 100.000 degrés.

Pour $k = 30$, la température serait de 40.000 degrés la variation de la grandeur de 8,2 et l'accroissement de

grandeur de 0,013 seulement par jour. Ce serait un peu faible.

Le choc tangentiel et la fusion superficielle de deux astres explique ainsi beaucoup mieux le phénomène des étoiles nouvelles que le choc direct et la fusion complète de ces deux astres. Mais il se présente d'autres objections.

La probabilité de rencontre de deux astres exigerait 10.000 fois plus d'étoiles pour expliquer la fréquence des étoiles nouvelles, comme l'a montré H. POINCARÉ dans ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, p. 262 et 243. De plus, la vitesse du choc serait telle que la fusion et le maximum d'éclat auraient lieu en quelques minutes au lieu de quelques jours. Il faut pousser plus loin l'analyse du phénomène.

11. **Passage d'une étoile dans une nébuleuse. Hypothèse Belot, Nordman.** — M. BELOT, suivi par Ch. NORDMAN, a mis en avant l'idée d'un astre condensé, rencontrant une nébuleuse, pour expliquer les phénomènes présentés par les étoiles nouvelles. Elle explique mieux certains faits.

Soit D la densité de la nébuleuse, supposée sphérique et homogène pour simplifier, R son rayon, $m'$ sa masse, $m$ celle de l'étoile, $v$ la vitesse relative des deux astres, due à leur attraction mutuelle. L'énergie absorbée par l'échauffement superficiel est négligeable. La température T augmente jusqu'à ce que la chaleur rayonnée $\delta$ Q égale la chaleur produite $\delta$ E par la chute de la masse $\delta m$ rencontrée

$$\delta Q = 4\pi r^2 . \sigma T^4 dt, \qquad \delta E = \frac{1}{2} v^2 \delta m = \frac{1}{2} \pi r^2 D v^2 \delta l$$

où $r$ est le rayon de l'étoile, $\alpha$ le coefficient de STEFAN. On en déduit

$$(36) \qquad \sigma T^4 = \frac{1}{8} D v^3, \qquad v^2 = 2f\frac{m+m'}{R},$$

$v$ est la vitesse à l'entrée et ne variera guère.

Un Soleil, pénétrant dans une nébuleuse de même masse s'étendant jusqu'à la Terre, s'élèverait à une température de 16.200 degrés. Son éclat serait 50 fois plus grand et augmenterait de 4,33 grandeurs. Cet éclat atteindrait en quelques heures son maximum, qui augmenterait de peu, comme la vitesse. Il persisterait pendant le temps de la traversée, 25 jours au maximum, s'éteindrait aussi rapidement, sans laisser de traces durables, car l'action serait toute superficielle.

Pour que l'éclat augmente de 10 grandeurs il faut réduire le rayon de la nébuleuse à 0,31 de la distance du Soleil. Le temps du maximum serait de 4 jours. Pour 15 grandeurs, il faut réduire la distance à 0,10 et le temps se réduit à 18 heures.

Si on suppose une nébuleuse de condensation maximum c'est-à-dire dont la densité varie en raison inverse du carré de la distance au centre, on obtiendrait un accroissement de 3 grandeurs à la distance de la Terre, un accroissement de 9 grandeurs à une distance 8 fois moindre et de 15 grandeurs à une distance 16 fois moindre, soit à 13 rayons solaires.

On peut admettre également que l'astre tombe sur la nébuleuse suivant une orbite parabolique et non rectiligne. Les résultats seraient sensiblement les mêmes et assez différents des faits présentés par les étoiles nouvelles.

12. **Collision des deux composantes d'une étoile double, ou fusion d'une planète et d'une étoile. Hypothèse A. Véronnet.** — L'hypothèse précédente se rapproche davantage des phénomènes observés, mais il faut réduire considérablement le diamètre de la nébuleuse pour obtenir une variation d'éclat assez considérable. On est ainsi conduit à remplacer la nébuleuse hypothétique par l'atmosphère d'une étoile, dans laquelle viendrait tournoyer le satellite d'une *étoile double*, ou simplement une *grosse planète*, qui se trouverait assez rapprochée de l'étoile centrale pour subir une certaine résistance de la part du milieu. C'est l'hypothèse présentée par A Véronnet (*C. R.* 1922).

Nous verrons d'ailleurs, dans le chapitre suivant, que la formation d'une étoile entraîne nécessairement la formation d'un système planétaire, plus ou moins considérable. Les conditions nécessaires seront partout réalisées, alors que la rencontre d'une nébuleuse exige que celles-ci soient 100 fois plus nombreuses que les étoiles pour donner la probabilité de rencontre nécessaire pour expliquer la fréquence des étoiles nouvelles. Ce serait bien hypothétique.

Dans le cas d'un satellite, qui tourne autour d'un astre central, d'un mouvement circulaire, pour s'y agglomérer ensuite, la force vive est la moitié de ce qu'elle est en chute directe ou parabolique tangentielle. Le premier membre de la formule (27) est à diviser par 2. Les formules (30) deviennent

$$(37) \qquad k\frac{x}{R} = 1, \qquad \frac{T}{T_1} = \frac{3M}{k^2 m}.$$

La valeur de $k$ serait seule modifiée. Les expressions de

$g$, $dg$, $d$T qui sont fonctions de la température seule ne sont pas modifiées. Les résultats obtenus plus haut restent les mêmes pour les mêmes températures.

Une grosse planète de l'ordre de Jupiter, d'une masse égale au millième de l'astre central, en se fusionnant à lui, après avoir tournoyé dans son atmosphère, suffirait pour lui donner passagèrement une température de 100.000 degrés et l'éclat d'une étoile nouvelle, avec une variation de 10 à 15 grandeurs et un éclat ensuite rapidement décroissant. Une telle agglomération aurait pu faire autrefois du Soleil une magnifique étoile nouvelle et expliquer en même temps toute sa rotation actuelle.

Les phénomènes accessoires des étoiles nouvelles s'expliquent également par cette élévation de température. La dilatation donne des courants ascendants, dont la vitesse est celle des molécules, soit 90 km : sec. pour l'hydrogène dissocié à 300.000° et une vitesse 45 fois plus grande pour les électrons fournis par l'ionisation intense. On a 1.000 kilomètres pour une proportion du quart. Les courants descendants sont dus à la retombée vers la surface, vitesse de 612 kilomètres, sur une masse comme le Soleil, et à peu près le double pour une masse double. Les courants ascendants se refroidissent et se ralentissent. Ils doivent donner des raies d'absorption, indiquant une vitesse plus faible, dirigée vers l'extérieur. Les courants descendants se réchauffent par transformation de force vive. Ils doivent donner des raies brillantes, indiquant une vitesse plus grande vers l'intérieur. C'est ce que les mesures spectroscopiques vérifient[1].

[1] De plus, dans les étoiles nouvelles les raies sont étalées en bandes,

La pression de radiation due à la température dépasse de beaucoup l'attraction, pour les fines particules analogues à celle de la couronne. Elles seront chassées, entraînant des molécules gazeuses, pour former une nébulosité autour de l'astre, devenu étoile nébuleuse. La vitesse se rapproche de celle de la lumière et devient sensiblement constante à une certaine distance (*Nova Persei*). On obtient au bout d'un an, pour une étoile nouvelle située à 1000 parsecs, une nébulosité de 1′ de diamètre apparent, et 60.000 rayons de l'orbite terrestre, comme diamètre réel.

13. **Cas du choc tangentiel de deux amas stellaires, nébuleuses spirales.** — Si l'on considère deux astres de masses comparables, qui se fusionnent, en tournant l'un autour de l'autre, il faut déduire de l'énergie totale, l'énergie de rotation qui subsiste après le choc, et l'énergie qui avait été perdue auparavant dans la résistance du milieu pour donner des orbites à peu près circulaires.

L'énergie disponible et transformée en chaleur est alors réduite dans de grandes proportions, jusqu'au sixième de l'énergie de formation de l'une des masses. Cette énergie est encore énorme.

Si toute la chaleur était employée à échauffer et dilater la masse, la température serait multipliée seulement

ce qui indique une vitesse moléculaire et une température considérable, plus grande pour les raies brillantes, si elles sont engendrées comme il est indiqué ci-dessus. C'est bien ce que l'observation constate.

par 1,17 et le rayon par 1,33 au lieu de 4 et 2 dans le choc direct [1].

Mais dans le choc tangentiel par rotation, l'énergie est produite *à la surface*, par la friction des deux astres et ce sont les formules du choc tangentiel qui sont ici applicables. Nous n'avons considéré qu'une masse faible, qui s'incorpore rapidement à un astre central, ce qui semble correspondre aux phénomènes présentés par les étoiles nouvelles (n° 10).

Si on considère des masses considérables, le phénomène sera le même, mais il sera beaucoup plus prolongé, jusqu'à la fusion complète des deux masses. Nous obtenons donc au point de frottement des deux astres une source d'énergie intense, qui élève la température de 100.000 degrés ou plus, comme on l'a vu. La pression de radiation due à ce rayonnement intense devient supérieure à l'attraction. Les particules des deux astres sont chassées, suivant deux pôles opposés, situés sur la ligne des centres des deux astres comme deux queues de comètes opposées. La rotation dispersera ces particules dans l'espace suivant une double spirale. Nous obtenons des apparences analogues à celles qui sont présentées par les nébuleuses spirales, figure 26.

La trajectoire de chaque particule dans l'espace serait une hyperbole, sur laquelle la vitesse devient rapidement radiale. Les particules lancées à des instants différents ont tourné d'un certain angle égal à celui de la rotation des deux masses centrales, déterminant les spires. La distance entre les spires est égale à l'espace parcouru

[1] A. Véronnet, Constitution et formation des nébuleuses spirales. *Comptes rendus*, t. 172, p. 957.

par les particules pendant une rotation des deux astres.

Une température superficielle 10 fois plus grande que celle du Soleil, donnerait aux fines particules des vitesses, de l'ordre de 100.000 km. par seconde, voisines de celles

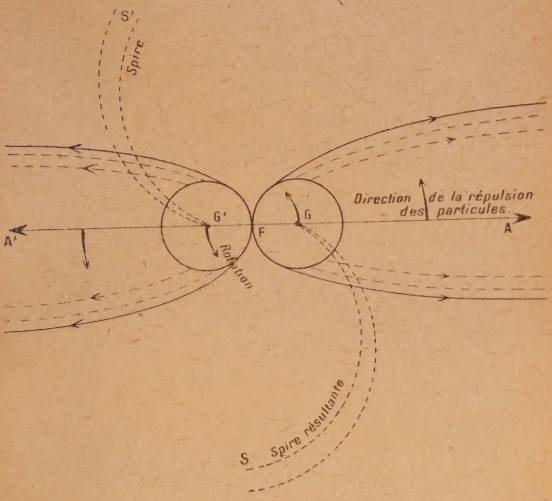


Fig. 26. — Nébuleuse spirale. G, G' centres des deux amas. — GA et G'A', ligne des centres, direction de la répulsion sous l'action des deux surfaces rayonnantes — GS et G'S' les deux spires résultantes.

de la lumière. L'écart des spires atteindrait 1″ à une distance de 15 parsecs. Cet écart est beaucoup trop faible.

On est conduit alors à envisager la friction tangentielle de deux amas stellaires, dont les rayons sont beaucoup plus grands et la rotation plus lente. On aura un écart

des spires beaucoup plus considérable, en rapport avec les observations.

En effet, la vitesse linéaire et la vitesse de rotation de deux astres au contact, de même masse $m$ et même rayon $r$, serait

$$v^2 = f\frac{m}{r}, \qquad \omega^2 = \frac{v^2}{r^2} = f\frac{m}{r^3}.$$

Pour deux amas de 10.000 étoiles, dont le rayon d'équilibre, déterminé plus haut, serait de 23,3 fois la distance du Soleil, on obtient une vitesse de rotation 3.550 fois plus faible que celle de deux Soleils. L'écart correspondant des spires serait de 1' à 900 parsecs. Nous réalisons bien ainsi les données des observations.

On sait d'ailleurs que le spectre des nébuleuses spirales les rattache tout à fait aux amas stellaires. Leurs grandes vitesses radiales également. Mais ces vitesses, en très grande majorité positives, si elles sont réelles, indiqueraient que ces systèmes ne font pas partie de notre Voie Lactée, même étendue aux amas globulaires.

Les mesures de Van Maanen indiquent que la plupart des mouvements sont plutôt centrifuges [1], ce qui indique bien une autre action que la gravitation. Ces déplacements rapides peuvent permettre à la nébulosité, chassée par la pression de radiation, de traverser d'autres systèmes, d'autres étoiles, pour les illuminer au passage, mais sans que ces étoiles fassent nécessairement partie de la spirale. Il y aurait donc peut-être des réserves à faire sur les déductions tirées des mouvements observés.

[1] V. *Bul. de la Soc. astr.*, 1921, p. 249.

En tout cas ces mesures montrent que ce sont des *systèmes à évolution rapide*, puisque leurs mouvements internes ont pu être mesurés sur des déplacements de quelques dizaines d'années. Ce sont des systèmes d'autant plus intéressants à observer.

Ils seront d'autant plus intéressants si, selon cette théorie, ils forment le résultat de l'évolution ultime des amas stellaires, qui eux-mêmes viennent après l'évolution des étoiles. Les régions des nébuleuses spirales, de part et d'autre de la Voie Lactée, et complètement en dehors d'elle, seront donc des régions à évolution accélérée et beaucoup plus avancée.

On pourrait considérer également les nébuleuses spirales comme résultant du simple rapprochement, sans conflagration, de deux amas stellaires, constituant un système double, analogue à une étoile double. La pression de radiation de l'un des amas sur les particules de l'autre serait suffisante pour les chasser, comme deux gigantesques queues de comètes.

14. **Les étoiles géantes. Les conditions physiques normales ne suffisent plus.** — Il ne semble pas que l'on puisse considérer les étoiles géantes comme des étoiles ordinaires simplement dilatées par une température plus haute.

Les observations montrent que les masses des étoiles géantes sont du même ordre que celles des étoiles normales ou naines. Le spectre est semblable, à quelque détail près, à celui des étoiles du même type spectral. La température effective de la surface visible est également du même ordre. La photosphère visible et rayonnante des étoiles géantes est donc tout à fait analogue à

celle des étoiles naines correspondantes. Leur éclat par unité de surface est sensiblement le même. Leur éclat total, qui est parfois des milliers de fois plus grand que celui des naines du même type, ne dépend donc plus que du rayon de l'enveloppe extérieure. Le rayon est ici beaucoup plus grand.

Comment des étoiles de masse analogue peuvent-elles avoir des photosphères de constitution analogue et de température analogue, mais de rayons très différents, jusqu'à des centaines de fois plus grands ou plus petits ?

Nous ne pouvons pas expliquer cela simplement par une dilatation de l'étoile en bloc. Il y faudrait des températures énormes et si la loi de distribution des températures reste la même à l'intérieur de l'étoile, nous sommes obligés d'admettre, à la surface extérieure et sur la photosphère, des températures surélevées dans la même proportion. Ce qui n'est pas.

Dans les étoiles naines ou normales la photosphère repose sur le noyau, ou un peu au-dessus, dans les parties basses de l'atmosphère, tout comme les couches de nuages au-dessus de la Terre. Il faut que dans les étoiles géantes intervienne un autre phénomène, qui repousse cette photosphère assez loin, pour que la température y soit plus basse. Ce phénomène ce sera la pression de radiation de l'astre central.

Nous pouvons déjà, dans le Soleil, voir quelque chose d'analogue et comprendre le mécanisme du phénomène. C'est la couronne.

On calcule facilement qu'à la surface du Soleil la pression de radiation peut équilibrer l'attraction pour des particules de densité 1 et de diamètre de l'ordre de $1\mu$. Pour les particules plus petites, au-dessous du tiers de la lon-

gueur d'onde, la pression de radiation tombe rapidement. Le nombre des particules, ainsi repoussées et maintenues en équilibre pour former la couronne, est donc assez faible. Si la température du Soleil baissait, la couronne disparaîtrait complètement. Si la température du Soleil augmentait, la pression de radiation chasserait dans la couronne une partie des particules de la photosphère. Une augmentation de température assez considérable pourrait ainsi chasser la photosphère au delà de l'atmosphère, elle-même dilatée. La couronne serait devenue photosphère. Si la distance au noyau est assez grande, sa température pourra être assez basse et son rayonnement considérable. Nous aurons une étoile géante.

Mais pour que la pression de radiation agisse, il faut que l'étoile centrale demeure avec un noyau parfaitement défini, constituant une surface rayonnante, et que l'atmosphère, quoique dilatée, reste assez faible pour ne pas absorber tout ce rayonnement.

Or ces conditions physiques nécessaires ne se trouvent pas réalisées avec la loi des gaz parfaits. Nous avons vu au contraire qu'avec la loi des gaz réels nous avions un noyau parfaitement délimité et stable dont la densité variait à peu près en raison inverse de la température. Pour un rayon double nous obtenons une température 8 fois plus considérable, soit environ de 50.000 degrés pour le Soleil. Le rayonnement serait 16.000 fois plus considérable donnant une pression de radiation 4.000 fois plus grande.

Nous verrons que ces conditions physiques très simples suffisent à étendre, à des centaines de fois le rayon de l'astre, l'enveloppe de particules gazeuses qui constitue la photosphère, la seule surface visible.

L'atmosphère sera prolongée jusqu'à l'enveloppe par une atmosphère d'électrons. L'ionisation sur l'enveloppe pourra donc être plus active que dans les étoiles naines correspondantes, la pression plus faible aussi, ce qui peut expliquer les *différences spectrales* des deux familles d'étoiles et justifier la méthode d'Adams. Enfin l'enveloppe pourra laisser filtrer parfois le rayonnement direct de l'étoile centrale plus stable et donner les raies stationnaires du calcium.

15. **Les Céphéides. La théorie des pulsations.** — Les Céphéides sont des variables à courte période, dont le type est $\delta$ Céphée. Les observations signalent cinq points principaux qui sont à expliquer dans ces étoiles.

1. On observe d'abord une superposition très nette des courbes de vitesse radiale et d'éclat. Le maximum de vitesse vers nous coïncide avec le maximum de lumière. — 2. On observe ensuite une dissymétrie nette des courbes, montée brusque, descente plus lente, avec parfois maximums secondaires. — 3. Il y a une relation entre la durée de la période et la grandeur absolue. — 4. Ce sont des étoiles géantes et même ultragéantes. — 5. On a constaté récemment que la grandeur bolométrique variait peu, malgré la variation considérable de grandeur visuelle ou photographique.

On a proposé quatre théories principales des Céphéides, qui se ramènent à deux : étoiles doubles ou pulsations.

Quand on a constaté la variation de la vitesse radiale on en a déduit immédiatement que c'étaient des étoiles doubles, Luizet, etc. On a expliqué la variation de l'éclat par l'occultation du satellite, étoiles binaires à éclipses. Mais alors le maximum de vitesse vers nous ne pouvait pas

coïncider avec le maximum d'éclat. On a réalisé cette coïncidence en admettant que le satellite tournait dans un milieu résistant. La face avant s'éclaire davantage par le frottement sur les particules du milieu. Mais on n'expliquait aucun des autres points.

Shapley a montré que les faits physiques s'expliquaient beaucoup mieux en admettant des pulsations de la masse de l'étoile, dont le rayon oscillait autour d'une valeur moyenne (*Astrp.* J., t. 40, 1914). Eddington a fait la théorie du phénomène dans l'hypothèse d'une étoile géante, constituée par une masse de gaz continue (M. N., t. 79, p. 2 et 227, 1918). Toute période d'oscillation peut alors s'exprimer comme racine carrée de la densité, troisième point. On obtient bien les deux courbes de vitesse radiale et de luminosité. Mais il semble que les conditions d'éclat doivent être les mêmes ici en passant aux deux positions moyennes, alors que les vitesses radiales y sont maximum.. Il n'y aurait pas concordance des courbes. Il est bien difficile d'admettre également une pulsation qui atteigne la masse entière en si peu de temps.

Ces objections disparaissent dans le cas des pulsations d'une enveloppe de particules, constituée comme il est dit plus haut. Il y aurait une position d'équilibre dynamique de l'enveloppe, correspondant à l'équilibre de rayonnement et au cas d'une étoile géante sans pulsation. Dans le cas d'une rupture d'équilibre et pulsation, il y a réchauffement de l'enveloppe quand elle est plus près du noyau que dans la position d'équilibre et refroidissement quand elle est plus loin. Elle a bien sa vitesse maximum vers nous et maximum d'éclat en même temps, en passant par la position d'équilibre, son minimum de vitesse et d'éclat en y repassant en sens contraire.

Les deux phases avant et après sont nécessairement dissymétriques. L'énergie bolométrique de l'enveloppe reste sensiblement constante, pour la même raison que nous le verrons dans le cas de variation du rayon d'une géante au cours de l'évolution. La grandeur visuelle peut varier de 6 unités quand la température passe de 1.200 à 10.000 degrés (*Rev. d'Optique*, t. 2, p. 41, 1923). (A. Boutaric et Vuillaume.)

16. **Conditions de formation et d'équilibre d'une enveloppe.** — Il suffit que la température superficielle soit assez élevée, soit par suite de la formation de l'étoile qui serait de masse très considérable, soit par suite de la fusion d'un satellite de grande masse, dans le cas d'une étoile nouvelle.

Quelle que soit la cause de cette élévation de température, la pression de radiation résultante va repousser les particules libres et produire une nébulosité diffuse tout autour de l'astre. Sur un astre analogue au Soleil, où la température superficielle deviendrait seulement 10 fois plus grande, la pression de radiation serait 10.000 fois plus considérable. Les particules pour lesquelles auparavant la répulsion était égale à l'attraction, seraient lancées avec des vitesses croissantes, qui tendraient vers 60.000 km : sec.

Mais cette répulsion diminue avec le temps, par abaissement de la température superficielle. Elle diminue avec la distance à l'astre central par suite de l'absorption du rayonnement par la nébulosité qui continue à se former. Il se trouvera donc une distance et une couche sur laquelle l'attraction redeviendra égale à la répulsion. Les vitesses des particules vont diminuer à partir de cette

distance et à partir de ce moment. Si le travail ultérieur de l'attraction arrive à annuler la force vive acquise, les particules vont retomber sur cette couche, où la répulsion moyenne égale l'attraction.

Cette couche moyenne va tendre ensuite à s'isoler dans la nébulosité formée : elle va tendre à constituer une enveloppe fermée et délimitée, analogue à celle que nous voyons dans les nébuleuses planétaires. En effet, les particules extérieures à cette couche, où l'attraction l'emporte sur la répulsion, vont être attirées vers elle. Les particules intérieures, pour lesquelles la répulsion est plus grande, vont être repoussées vers elle. Les chocs vont mélanger tous ces éléments, suivant les lois de l'équilibre cinétique, comme pour les molécules d'un gaz. Nous aurons bien une enveloppe continue, analogue à une photosphère. Si elle est assez épaisse pour arrêter complètement ou à peu près le rayonnement de l'astre central, nous pourrons avoir tous les éléments nécessaires pour réaliser un équilibre relativement stable et une véritable étoile géante.

On démontre facilement que la masse par centimètre carré de surface d'une enveloppe de particules, équilibrée par la pression de radiation, est indépendante du rayon de cette enveloppe. Sur le Soleil, avec $T = 6.000°$, on aurait une pression de 2,3 dynes et une épaisseur effective de $0\mu,853$. Ces nombres seraient doublés pour une température de 6.700°, soit 1/9 seulement en plus. Pour des températures 20 fois plus grandes que celle du Soleil, l'épaisseur effective peut atteindre de 14 centimètres à 54 centimètres. L'absorption peut bien être considérée alors comme complète et le rayonnement extérieur de l'étoile se réduirait nécessairement à celui de son enve-

loppe. Il doit y avoir parfois filtration de la lumière de l'étoile centrale et superposition des spectres d'après les particularités mêmes des spectres des géantes.

Il faut remarquer aussi que l'équilibre de cette enveloppe serait instable, si elle était complètement isolée. En effet, nous supposons que son poids équilibre la pression de radiation. Si cette pression diminue par suite du refroidissement, l'attraction l'emporte, l'enveloppe se contracte. Son poids par centimètre carré augmente encore et accélère la contraction. Il faut donc que cette enveloppe de particules repose sur l'atmosphère qui ajoutera sa pression à la pression de radiation et lui assurera une stabilité relative. La diminution de la température de l'astre central produira donc une contraction de l'ensemble, de telle façon que l'étoile géante tendra à redevenir normale, c'est-à-dire que l'enveloppe extérieure se rapprochera progressivement du noyau interne, jusqu'à reposer finalement sur lui comme la photosphère du Soleil. L'équilibre peut être rendu stable également par la chute progressive des particules les plus grosses.

On voit donc que, dans cette hypothèse, la limite du rayon de l'enveloppe des particules sera la même que celui de l'atmosphère même de l'astre central. Or, on peut déterminer l'extension d'une atmosphère en fonction de ses conditions d'équilibre et de la température à la surface de l'astre.

On montre qu'avec une précision suffisante la loi des températures, dans une atmosphère étendue, peut se représenter par la formule

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \qquad (38)$$

$r_1$ étant le rayon et $T_1$ la température à la surface. On a $n = 1/2$ pour l'équilibre radiatif et $n = 1$ pour l'équilibre adiabatique. Comme le rayonnement et les courants de convection doivent concourir à la fois à établir la température d'équilibre, nous pouvons considérer que celle-ci est donnée par la formule ci-dessus où $n$ est comprise entre 1/2 et 1.

On peut alors calculer la formule qui détermine la température T de l'enveloppe et son rayon $r$ en fonction de $n$. On a encore 2400° à 100 rayons pour $n = 0,7$ et à 200 rayons pour $n = 0,6$, en donnant à l'étoile centrale la masse du Soleil et une température seulement 10 fois plus grande. Si l'on tient compte de la dilatation de l'astre central lui-même, ces nombres sont à multiplier par 2,15. On obtient une enveloppe de 430 rayons solaires à une température de 2400° pour $n = 0,6$. On réalise ainsi les conditions extérieures des plus grandes étoiles géantes, avec, comme noyau, une étoile dont les conditions physiques ne sont pas très différentes de celles du Soleil. La température superficielle en sera tout au plus multipliée par 10, par moins encore si l'on admet une masse plus grande que celle du Soleil. Les variations de ces conditions physiques permettent d'entrevoir leur évolution possible et de voir si cette évolution cadre avec ce que nous savons de ces étoiles [1].

17. **Evolution des géantes. Cas de la nébuleuse de Laplace.** — Remarquons d'abord que la présence de l'enveloppe modifie l'intensité du rayonnement et la vi-

[1] A. VÉRONNET, Constitution physique des étoiles géantes, *Bull. astrom.* t. 2, 1921 et *Annales de l'Obs. de Strasbourg* 1926.

tesse du refroidissement. En appelant Q la quantité d'énergie rayonnée, en désignant par l'indice 1 les valeurs relatives à l'étoile centrale, celles de l'enveloppe étant sans indice, on a, d'après la loi de STEFAN et la formule (38)

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{T^4 r^2}{T_1^4 r_1^2} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{4n-2} \tag{39}$$

Dans le cas d'équilibre radiatif, $n = 1/2$, l'exposant est nul. L'étoile géante rayonne la même quantité de chaleur que rayonnerait l'étoile centrale dépourvue d'enveloppe.

Le noyau se refroidira donc aussi vite. Dans le cas d'équilibre adiabatique limite, le refroidissement de l'étoile centrale serait en raison inverse du carré du rayon de l'enveloppe. Il sera donc 10.000 fois moins rapide avec une enveloppe de rayon égal à 100 fois le rayon de l'étoile.

Il suffit de déduire une nouvelle relation analogue à (38), qui détermine les rapports des deux rayons, de l'enveloppe et de l'étoile, en fonction de la température de l'étoile, pour calculer toute l'évolution de l'étoile géante.

Le tableau ci-dessous donne les températures et rayons successifs d'une étoile de masse égale à celle du Soleil, de type M, température extérieure 3.000°, température du noyau 16 fois celle du Soleil, rayon extérieur égal à 360 rayons solaires.

| Types | M | K | G | F | $A_5$ | $A_0$ | $B_5$ | $B_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T..... | 3.000 | 4.000 | 6.000 | 8.000 | 10.000 | 12.000 | 15.000 | 18.000 |
| $T_1 : T_0$ | 16.20 | 12.36 | 8.40 | 6.42 | 5.22 | 4.38 | 3.57 | 3.0 |
| $r : r_0$.. | 360 | 149 | 42.7 | 17.6 | 8.83 | 5.02 | 2.53 | 1.43 |

Nous avons la monographie de Bételgeuse résumée

dans ce tableau [1] où la première ligne indique le type approximatif de l'étoile, la seconde la température correspondante de l'enveloppe extérieure, la troisième la température de l'étoile intérieure par rapport au Soleil, la quatrième les valeurs successives du rayon de l'enveloppe en rayons solaires.

Il faut considérer aussi le cas où la nébulosité primitive n'arrive pas à former une enveloppe complète, si le satellite est de masse assez faible par exemple. Les particules équatoriales, où la force centrifuge est plus grande, et la température plus élevée, seront repoussées plus facilement. Au lieu d'une enveloppe sphérique, on pourra avoir une nébulosité ellipsoïdale très aplatie comme on le voit pour beaucoup de nébuleuses. Par l'effet de l'attraction ces particules se concentreront sur le plan de rotation en formant un disque aplati. Il se peut que l'*anneau de Saturne* soit dû à un phénomène de ce genre, car la force centrifuge due à la contraction seule a été impuissante à égaler l'attraction (ch. I n° 9).

Si des noyaux de condensation existaient déjà dans cette nébulosité équatoriale, ils ont pu drainer toute la matière environnante et constituer un système de planètes, analogue au système solaire. Nous avons une *nébuleuse de Laplace*, ou analogue, mais tournant plus vite, de masse moindre, et qui ne soulève pas les mêmes objections pour expliquer la formation du système solaire. La lumière zodiacale serait le résidu de cette nébuleuse, la couronne les dernières traces de l'en-

[1] Ce Tableau donnera également l'évolution et les phases successives de toute autre étoile dont les caractéristiques correspondront à celles du Tableau, dans un type quelconque.

veloppe, l'accélération équatoriale du Soleil serait le témoignage de la rotation du satellite, conservée depuis des centaines de milliers d'années, car la diffusion des vitesses dans les gaz est extrêmement longue.

Si l'on considère les 6 000 étoiles les plus brillantes, près de la moitié sont des types G, K, M avec maximum du type K ; l'autre moitié sont des types B, A, F, avec maximum du type A. La plus grande partie du premier groupe sont des naines, celles du second groupe sont des géantes. Ce second groupe reproduirait exactement le premier, comme une transposition à une autre échelle, ce qui s'explique très bien dans l'hypothèse où les géantes ne sont que des naines rajeunies par une fusion. De même si les géantes sont des naines dont l'éclat a augmenté de 10 grandeurs en moyenne, ce sont des naines de 10e grandeur, et au delà, qui auront fourni les géantes visibles, de là leur condensation considérable dans le plan galactique, surtout pour les B, aboutissement final des géantes, qui redeviennent normales avec ce type.

## CHAPITRE XI

### FORMATION DES SYSTÈMES PLANÉTAIRES. DÉVIATION PRODUITE PAR LES ÉTOILES VOISINES. ACTION DE LA RÉSISTANCE DU MILIEU.

1. **Le problème planétaire et ses données. Moment de rotation invariable.** — Nous avons vu comment, la matière étant dispersée dans l'espace d'une façon quelconque, le plus faible excès de densité constituait un centre d'attraction, qui condensait progressivement toute la matière environnante. Nous avons vu comment les variations de densité, supposées quelconques, délimitaient automatiquement les sphères d'action des étoiles isolées et des amas d'étoiles, à l'intérieur desquelles l'attraction condensait progressivement toute la matière, en isolant et délimitant de plus en plus les différents systèmes.

Nous n'avons étudié que l'attraction directe, en en déduisant le temps mis par les systèmes pour se former et leur température de formation.

Nous allons étudier dans ce chapitre les perturbations et les modifications introduites dans la condensation d'un astre par l'action des astres voisins et l'action du milieu. Nous allons voir comment certaines parties d'une nébuleuse qui se condense sont ainsi déviées de la chute en ligne droite, arrivent à tourner autour de leur astre central, pour constituer un système de planètes et de comètes.

Dans ce chapitre, comme dans ceux qui précèdent sur

la formation des étoiles, nous ne ferons *aucune hypothèse spéciale* sur l'état de la nébuleuse, nous étudierons le problème général, en montrant que dans tous les cas il doit en résulter un système planétaire.

Au point de vue mécanique notre système planétaire est caractérisé par son moment de rotation, ou par la somme des moments des quantités de mouvement. L'action de résistance du milieu *extérieur* (éther ou autre), est insensible. Ce moment de rotation est resté sensiblement invariable depuis l'origine, depuis l'isolement de l'ensemble. C'est un *invariant* caractéristique du système. C'est l'élément essentiel dont il faut expliquer l'origine. Tout le reste n'est que détail et accessoire. Toutes les théories cosmogoniques l'ont pris à tort comme *donné*.

Or, au point de vue mécanique, tout le problème de l'origine des planètes consiste dans l'explication de ce moment de rotation.

Le moment de rotation de l'ensemble des planètes est 25 fois plus considérable que celui du Soleil. Ce dernier n'est qu'un résidu du premier. Pour les satellites des planètes, c'est le contraire. Le moment de rotation des satellites n'est qu'une faible partie de celui du système planétaire. La Lune seule possède un moment de rotation du même ordre que celui de la Terre. La théorie de la formation des satellites, au point de vue mécanique, ne peut pas être la même que celle des planètes. L'explication de l'origine du moment de rotation des planètes sera suffisante. Le moment de rotation du Soleil et des satellites n'en sera qu'une faible partie, qui se rattachera au tout.

2. **Le problème cosmogonique des trois corps. Moment de rotation maximum.** — Si nous supposons

deux points matériels en présence, sans vitesse initiale, ils s'attirent directement et tombent l'un sur l'autre, sans rotation. Dès qu'il y a trois points, ou plus, les mouvements de rotation apparaissent nécessairement.

Nous appellerons problème cosmogonique des trois corps le cas où les trois points sont immobiles au début. Dans ce cas le centre de gravité reste fixe. Les trajectoires restent planes. D'après l'intégrale des forces vives les distances au centre de gravité restent plus petites que les distances initiales, en moyenne. D'après le théorème des

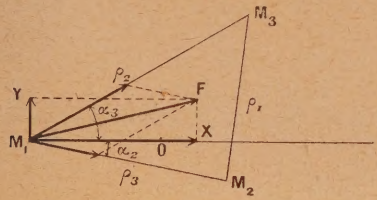


Fig. 27. — Attraction de trois corps.

aires, la somme des aires reste toujours nulle. L'un des points va tourner dans un sens autour du centre de gravité et les deux autres points dans l'autre sens. Les moments de rotation opposés étant à chaque instant égaux.

Soient (fig. 27), $M_1$, $M_2$, $M_3$, les trois points, $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ leurs distances, O le centre de gravité, $\alpha_2$, $\alpha_3$ les angles de $\rho_2$ et $\rho_3$ avec la ligne $OM_1$. Considérons la force agissant sur $M_1$, apjelons X la composante de cette force dans la direction du centre de gravité, Y sa composante normale à cette direction. C'est cette dernière force qui donnera la déviation et le moment de rotation. Nous

évaluerons la grandeur *relative* de cette action par le rapport de Y à X.

Nous obtenons immédiatement les formules :

$$(1) \qquad X = -fm_1\left(\frac{m_2 \cos \alpha_2}{\rho_3^2} + \frac{m_3 \cos \alpha_3}{\rho_2^2}\right),$$

$$(2) \qquad Y = -fm_1\left(\frac{m_2 \sin \alpha_2}{\rho_3^2} - \frac{m_3 \sin \alpha_3}{\rho_2^2}\right).$$

Les moments de $M_2$ et $M_3$ par rapport à la direction $OM_1$ donnent :

$$(3) \qquad m_2\rho_3 \sin \alpha_2 = m_3\rho_2 \sin \alpha_3.$$

On obtient alors

$$(4) \qquad \frac{Y}{X} = \frac{m_2 \sin \alpha_2}{\rho_2} \frac{\rho_2^3 - \rho_3^3}{m_2\rho_2^2 \cos \alpha_2 + m_3\rho_3^2 \cos \alpha_3}.$$

La déviation ne peut être nulle que si $\rho_3 = \rho_2$, c'est-à-dire si les points $M_2$ et $M_3$ sont à la même distance de $M_1$. Elle sera maximum pour le point tel que $\rho_2$ sera la plus grande distance et $\rho_3$ la plus petite.

Posons

$$(5) \qquad \alpha = \alpha_2 + \alpha_3, \qquad \mu = \frac{m_3}{m_2}, \qquad \rho = \frac{\rho_3}{\rho_2}.$$

L'équation (4) peut s'écrire,

$$(6) \qquad \frac{Y}{X} = \frac{\mu(1 - \rho^3) \sin \alpha}{\rho(1 + \mu^2\rho) + \mu(1 + \rho^3) \cos \alpha}.$$

L'angle de déviation de la force sur $M_1$ dépend de la figure du triangle $M_1 M_2 M_3$ par $\rho$ et $\alpha$, non de ses dimensions, et du rapport $\mu$ des masses de $M_3$ et $M_2$.

La configuration du triangle étant donnée, on voit

facilement, en dérivant par rapport à $\mu$, que cette déviation sera maximum quand on aura

$$\mu^2\rho = 1, \qquad m_1^2\rho_3 = m_2^2\rho_2, \tag{7}$$

En portant cette valeur dans (6) on obtiendra de même la valeur de $\alpha$, qui rend cette expression maximum. Mais ces formules générales ne permettent pas les calculs pratiques.

3. **Formation d'un système planétaire par le satellite d'une étoile double, par une étoile nouvelle.** — Considérons le cas d'une étoile double avec un satellite décrivant une orbite très allongée autour de lui. Si le satellite, au périhélie, vient à frôler l'étoile centrale il peut se partager en fragments, qui se disperseront sur différentes orbites. Ce phénomène peut-il produire un système planétaire ?

Soit $m$ la masse du satellite, $\rho$ sa distance périhélie, $m'$ la masse des planètes formées par lui, $r'$ leur rayon de giration moyen. On aura d'après la conservation des moments cinétiques,

$$m\sqrt{\alpha\rho} = m'\sqrt{r'} \qquad 1 < \alpha < 2 \tag{8}$$

$\alpha$ étant égal à 1 pour une orbite circulaire, à 2 pour une orbite parabolique du satellite. En prenant l'année, la masse et la distance de la Terre au Soleil pour unité on a $r' = 6{,}55$ pour le système planétaire et le second membre de (8) est égal à 1142. La distance périhélie $\rho$ serait égale au rayon du Soleil et la masse du satellite $m$ devrait être beaucoup plus grande que celle des planètes pour posséder le même moment de rotation. C'est le contraire qui

devrait avoir lieu, car le satellite entraînerait encore une partie de la masse du Soleil.

En admettant que les masses restent égales on aurait au plus $r' = 2\rho$. Le rayon de giration résultant ne pourrait être que le double de la distance périhélie du satellite, soit le double du rayon de l'étoile. Avec le rayon actuel du Soleil cette distance serait plus de 600 fois trop faible.

Pour obtenir le rayon de giration de notre système planétaire, il faudrait, au périhélie, et par conséquent au rayon du Soleil primitif, une grandeur égale à la moitié de 6,55, c'est-à-dire 3,27 la distance de la Terre au Soleil. Nous avons vu qu'avec une pareille dilatation, le passage d'un astre condensé à travers cette nébuleuse ne pourrait produire qu'un échauffement superficiel. Il faudrait supposer un satellite, également dilaté, ou formé d'un ensemble de météorites plus petits sur lesquels la résistance du milieu serait sensible. Nous verrons précisément que c'est la conception à laquelle nous serons conduits par l'étude du cas général.

La chute d'un satellite d'étoile double sur l'astre central doit produire une conflragation, qui donne une étoile nouvelle. La pression de radiation intervient pour chasser les particules sur des orbites à rayon plus grand. On peut avoir une enveloppe extérieure, enfermant complètement l'étoile centrale, comme dans le cas des étoiles géantes, ou incomplètement, et même formant anneau équatorial, comme dans les nébuleuses planétaires.

Mais ici on aura toujours la même formule (8). Le rayon de giration pourra être plus grand, grâce à la pression de radiation, mais alors la vitesse de rotation sera d'autant plus faible. Quand la pression de radiation diminue, cette vitesse n'est plus suffisante pour l'équilibre

et l'enveloppe ou l'anneau se contracte. Finalement quand la pression de radiation sera réduite à celle du Soleil, à peu près nulle, le rayon de giration sera le même que celui calculé plus haut.

La pression de radiation, force centrale, ne peut en rien modifier le moment de rotation. Les conclusions précédentes demeurent intégralement. Le système planétaire ne peut pas provenir d'éléments, dont la distance moyenne du périhélie primitif serait inférieure à la moitié du rayon moyen de giration des planètes soit 6,55.

4. **Etude de la déviation produite par les étoiles voisines.** — On supposera d'abord que la répartition

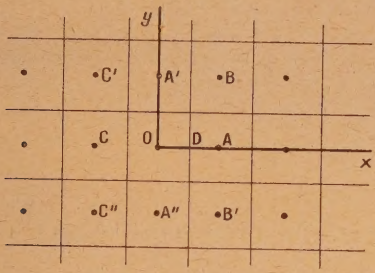


Fig. 28. — Répartition homogène des centres d'attraction.

des centres d'attraction primitifs, qui ont formé les étoiles était parfaitement régulière. Nous verrons ensuite l'effet des irrégularités.

L'espace entier est donc supposé partagé en cubes égaux par des plans parallèles. (On pourrait le diviser de même en octaèdres réguliers). Au centre de chaque cube nous

supposons un centre d'attraction de masse quelconque, la même pour tous, germe d'une future étoile. La figure 28 représente la section par un plan normal aux arêtes, et passant par les centres d'attraction, O astre central et A,A′, B,B′, C,C′, astres environnants.

Sur les points matériels intérieurs du cube, dont O est le centre, l'action des centres voisins exerce une action de déviation variable, qui est nulle seulement sur les axes de symétrie. La figure 29 indique cette variation par les

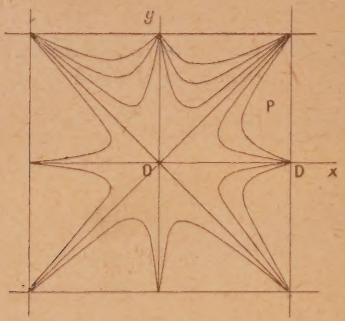


Fig. 29. — Zones d'égale déviation autour d'un centre.

courbes d'égale déviation. La déviation est maximum entre les axes de symétrie.

Les calculs ont été faits pour les points situés sur la droite $x = 2y$. Si on désigne par $2a$ la distance de deux étoiles, ou l'arête du cube, on trouve que pour un point situé à la distance $x = 0{,}6\,a$ la force normale de déviation est égale à 1 : 33 de la force radiale. Le moment de rotation résultant sera donc sensible. A la distance $x =$

0,2 $a$, au contraire, la force de déviation n'est plus que 1 : 1860 de la force d'attraction et la déviation devient négligeable.

Connaissant ainsi le rapport de la composante normale Y à la composante radiale X de la force, on pourra en déduire en chaque point l'accroissement de vitesse normale au rayon vecteur et par conséquent le moment de rotation acquis en chaque point. Soit $\mu$ ce moment de rotation pour l'unité de masse, on a

$$(9) \qquad \mu = C = rv \sin i, \qquad d\mu = r \sin i \, dv.$$

L'angle d'inclinaison $i$ de la force sur le rayon vecteur étant faible on peut remplacer sin $i$ par tg $i$, c'est-à-dire par le rapport Y : X. Le tableau suivant contient les valeurs de ce rapport à différentes distances du centre, la vitesse acquise $v$ par un point parti de la distance 0,6 $a$, l'accroissement de vitesse entre chaque position. On a supposé $x$ égal à 100.000 fois la distance du Soleil et la masse intérieure à 0,6 $a$ égale à celle du Soleil.

| $x =$ | 0,6$a$ | 0,5$a$ | 0,4$a$ | 0,3$a$ | 0,2$a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| X : Y = | 33,0 | 83,4 | 271 | 784 | 1860 |
| $v =$ | 0 | 37,4 | 81,0 | 136 | 214 |
| $dv$ | | 37,4 | 43,6 | 55 | 78 |

Les vitesses sont ici en mètres par seconde. En les exprimant en Km. par seconde, et les $x$ en distance du Soleil à la Terre, on trouve d'après la formule (9) que le total des quantités de mouvement, acquises par une particule tombant de 0,6 $a$, à 0,2 $a$ est comprise entre 31,9 et 104,6. En exprimant X : Y et $dv$ par une formule empirique en fonction de $x$ on obtient 63,1.

La valeur du périhélie correspondant, pour une orbite parabolique, serait égale à 2,25. Le rayon de l'orbite

circulaire ayant même moment de rotation serait 5,5o, un peu supérieur à la distance de Jupiter.

On verrait facilement que $dv$ est proportionnel à $a$. Si on suppose que la même masse primitive était répartie dans un cube de dimensions doubles, les éléments situés à la distance $0{,}6\,a$, sur la droite $x = 2\,y$, auront acquis un moment de rotation double. Ils tourneront autour du Soleil à une distance minimum, au périhélie, égale à 5,5o. Les éléments situés plus loin passeraient à une distance du Soleil encore plus grande. Nous avons bien tout ce qu'il faut pour donner les planètes connues, avec leurs distances et leur moment de rotation.

On a supposé la répartition des étoiles parfaitement homogène, et les masses égales. C'est le cas le plus défavorable, où la déviation sera nécessairement minimum.

Supposons la masse de l'étoile A double de celle des autres. On trouve, en refaisant le calcul, que le moment de rotation acquis est presque triplé, égal à 167. La distance, au périhélie, des éléments précédents, partis de $0{,}6\,a$, serait égale à 16. Toute irrégularité augmentera naturellement le moment de rotation. On obtient ainsi facilement un moment égal à celui du système planétaire, dont l'origine se trouve alors complètement et mécaniquement expliquée.

5. **Importance des masses non condensées en étoiles. Le « monde des comètes » et l'absorption. Nébuleuses spirales.** — Nous voyons, d'après la figure 29, qu'entre chaque axe de symétrie, il y aura une zone de déviation qui acquerra en tombant un moment de rotation

plus ou moins considérable. A cause des irrégularités de masse et de distance des étoiles environnantes les éléments faisant partie de ces zones arriveront auprès de l'étoile centrale à des époques différentes. La zone la plus voisine y arrivera la première, avec le plus petit moment de rotation, en passant le plus près du Soleil. Elle formera un premier système planétaire, celui que nous connaissons.

Les autres zones arriveront plus tard, en restant plus loin du Soleil, dans des directions différentes. Chacune constituera un autre système, qui sera trop éloigné de nous pour être visible. D'ailleurs pour ces autres éléments, les conditions de formation des planètes ont pu ne pas se trouver réalisées, en particulier la résistance du milieu. Les orbites des météorites élémentaires de ces systèmes ont pu rester isolées et très allongées, formant des systèmes de comètes, plutôt que des systèmes de planètes.

D'ailleurs au voisinage des axes de symétrie, ou de déviation nulle, figure 29, certains éléments très éloignés ont dû arriver très tard sur le Soleil, alors que le milieu était à peu près libre et nettoyé par la condensation. Ils ont constitué nos comètes. Certaines d'entre elles en sont même sans doute à leur premier virage autour du Soleil.

Il doit se trouver aussi probablement de grosses agglomérations, de masse comparable à de petites étoiles, et qui seraient cependant assez loin de nous pour être difficilement visibles. La distance aphélie serait de l'ordre de 100.000 fois la distance Terre Soleil. Peut-être trouvera-t-on un jour des étoiles faibles, satellites du Soleil.

En calculant la *déviation moyenne* sur un cercle de rayon $r$ on trouve qu'elle est égale à

$$\frac{Y}{X} = \frac{195\, r^5}{256\pi a^3}, \tag{10}$$

en négligeant les puissances supérieures. Pour $r = 0{,}5\ a$ on trouve 1 : 132. La déviation maximum était 1 : 83. On voit d'après le tableau que les éléments situés au delà de $0{,}5\ a$ auront un moment de rotation suffisant pour passer loin du Soleil et ne pas s'y incorporer. On en conclut que le dixième seulement de la masse primitivement dispersée dans l'espace s'est condensée en étoiles et Soleils. La matière restée à l'état dispersé, dans l'espace interstellaire, le « monde des comètes » de KÉPLER, serait 10 fois plus considérable que celle des étoiles, et peut-être davantage.

On peut voir facilement par le calcul que l'absorption, due à un pareil milieu, serait absolument insensible, si leur masse moyenne est de l'ordre de celle des comètes.

L'absorption est en effet très faible pour des éléments très dispersés.

Soit M la masse contenue dans un cube d'arête $a$. La masse $m$ contenue dans un prisme de un cm² de section et de longueur $a$ sera

$$m = \frac{M}{a^2}. \tag{11}$$

En supposant la masse $m$ formée de $n$ particules sphériques de rayon $r$, de densité $\rho$, on a pour la section totale S présentée par la masse

$$S = n\pi r^2 = \frac{3m}{4\rho r}. \tag{12}$$

La section et par conséquent l'absorption présentée par la masse $m$ est en raison inverse du rayon des particules, en les supposant assez épaisses pour être complètement absorbantes.

Prenons une masse égale à 10 fois celle du Soleil, répandue dans un cube de 100.000 fois la distance Terre-Soleil. La masse contenue dans une section de $1cm^2$ sera

$$m = \frac{2 \times 10^{34}}{1,5^2 \times 10^{36}} = \frac{2}{15^2} gr : cm^2.$$

On trouve alors que pour des particules de fer, densité 7, l'absorption serait seulement de 1/1000, c'est-à-dire $S = 0,001$ $cm^2$ en leur donnant un diamètre de 2 cm., une masse de 28 grammes.

En supposant l'espace entier rempli de météorites d'un diamètre 2.000 fois plus grand, soit 40 mètres, masses de 230 tonnes, l'absorption serait 2.000 fois moindre, soit environ de un millionième par parsec, ou un millième sur une profondeur de 1000 parsecs. Ce serait bien insensible.

Mais si l'absorption de la lumière des étoiles par de pareilles masses est négligeable il n'en est pas de même de l'attraction. On ne peut plus dans les questions de mouvements d'ensemble, contraction des amas, etc., tenir compte seulement de la masse des étoiles, qui ne sont que des points de plus grande concentration. Il faudra tenir compte de la masse non encore condensée, dans la première phase de l'évolution. Elle sera peut-être appelée à jouer un rôle dans la condensation des amas, quand les étoiles se rapprochent beaucoup, dans la formation des nébuleuses spirales en particulier. Deux amas rapprochés pourront former un système double,

analogue à une étoile double. Chacun d'eux exercera une force répulsive sur les milliards de comètes de l'autre. La résultante de toute ces queues de comètes sera une double spirale.

6. **Résistance du milieu. Formules générales.** — L'action des centres d'attraction, voisins d'une étoile en formation, donne un moment de rotation suffisant pour notre système planétaire. Il reste à expliquer pourquoi et comment la trajectoire de ces éléments qui ont formé les planètes est devenue circulaire, alors qu'au début elle formait une ellipse très allongée, ou sensiblement une parabole. C'est par l'action du milieu résistant.

L'influence d'un milieu résistant a été étudiée par FAYE et J. SEE, dans leurs hypothèses cosmogoniques, pour expliquer la forme circulaire des orbites planétaires. Cette explication semble définitivement admise. Il reste à en étudier le mode d'action, l'ordre de grandeur, la rapidité et les possibilités.

Elle a été étudiée également par V. ASTEN, M. BACKLUND[1], E. TISSERAND pour essayer d'expliquer les irrégularités de la comète d'ENCKE et celles de Mercure. On trouvera l'exposé de ces recherches dans le t. 4, chap. 13, *du Traité de mécanique céleste* de F. TISSERAND et dans le chap. 6° des *Hypothèses cosmogoniques* de H. POINCARÉ.

A. VÉRONNET a considéré cette résistance comme produite par la rencontre des particules du milieu, absorbées par l'atmosphère de l'astre[2]. La variation de sa masse

[1] *Bul. Ast.*, t. 11, p. 473 et t. 10, p. 504.

[2] *C. R*, t. 172, p. 267, et *Bul. Ast.*, t. 1 (1921) et t. 4. p. 351-394 (1924).

s'introduit alors comme un paramètre nécessaire au moyen duquel on peut déterminer la variation de tous les autres. Le problème peut être alors résolu complètement, en particulier dans le cas classique, où la densité du milieu varie en raison inverse du carré de la distance.

Nous allons résumer ici tous ces travaux et en indiquer les résultats pratiques.

On peut considérer une résistance comme une perturbation agissant à la façon d'une percussion, pour modifier la force vive instantanée, ou $v^2$. Par ricochet les constantes de la trajectoire $a$, $e$. $p$, C sont modifiées et subissent des variations $\delta a$, $\delta e$, alors que les paramètres de position de l'astre, $x$, $y$, $z$, ou $r$, $\theta$ restent invariables. C'est une application de la méthode de la variation des constantes.

La perturbation instantanée de la force vive $\delta v^2$ doit être assez petite, mais son origine et son mode d'action sont absolument quelconques.

La formule qui relie la vitesse $v$ à la distance $r$ donne la variation du grand axe $a$

$$\frac{v^2}{\mu} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \qquad \frac{\delta a}{a^2} = \frac{\delta v^2}{\mu}. \tag{13}$$

Les $\delta$ permettent de distinguer les variations produites par la perturbation de celles produites par la force, $dr$, $d$Q, etc.

L'expression de la constante des aires C nous donne ensuite la variation de l'excentricité $e$,

$$C^2 p\mu \quad \text{ou} \quad r^2 v^2 \sin^2 i = a\mu(1 - e^2) \tag{14}$$

et $i$ restent constants pendant la perturbation ou choc.

Les dérivées logarithmiques donnent

$$\frac{\delta v^2}{v^2} = \frac{\delta p}{p} = \frac{\delta a}{a} = \frac{\delta e^2}{1 - e^2}. \tag{15}$$

En remplaçant $\delta a$ par sa valeur (13) on obtient

$$\frac{\delta e^2}{1 - e^2} = \left(\frac{a}{\mu} - \frac{1}{v^2}\right)\delta v^2 = 2\frac{a - r}{r}\delta v^2. \tag{15'}$$

Les formules qui donnent la distance en fonction de l'anomalie vraie $w$ et de l'anomalie excentrique $u$ peuvent s'écrire

$$r = a(1 - e\cos u) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos w}. \tag{16}$$

La formule (15') devient alors, en y remplaçant $r$ par sa valeur, et $\delta e^2 = 2e\,\delta e$,

$$\delta e = \frac{p\cos u}{r}\frac{\delta v^2}{v^2} = (e + \cos w)\frac{\delta v^2}{v^2}. \tag{17}$$

Appelons $\alpha$ l'angle que fait le grand axe avec une origine fixe, angle qui définit la position du périhélie. En différenciant (16) par rapport à $w$, la variation $\delta\alpha$ de la longitude du périphélie est donnée par

$$-\delta w = \delta\alpha = \frac{\sin w\,\delta v^2}{e\ v^2}, \qquad w = \theta - \alpha. \tag{18}$$

En remplaçant dans (13) $r$ par sa formule (16) en $\cos w$ et $\cos u$ on a pour l'expression de $v^2$

$$\frac{av^2}{\mu} = \frac{1 + e^2 + 2e\cos w}{1 - e^2} = \frac{1 + e\cos u}{1 - e\cos u}. \tag{19}$$

7. **Variation du grand axe, de l'excentricité et du périhélie. Étude générale.** — La variation de force vive, à l'instant $t$, est assujettie seulement à être négative (définition d'une résistance). Elle peut varier d'une façon quelconque avec la position et la vitesse de l'astre. La formule (13) nous indique que $\delta a$ dépend uniquement de la perte instantanée de vitesse et est toujours négatif. *Le grand axe d'une orbite diminue toujours sous l'action d'une résistance de milieu.*

Considérons d'abord une trajectoire hyperbolique. L'axe $a$ est négatif. Si l'effet de la résistance persiste, cet axe croît en valeur absolue, passe par l'infini, devient positif, puis décroît indéfiniment. La trajectoire hyperbolique devient parabolique, puis elliptique, et le grand axe de cette ellipse diminue indéfiniment.

Si la résistance n'est pas assez grande et tend vers zéro, quand la distance croît, l'orbite peut rester hyperbolique et le mobile s'éloigner indéfiniment.

Quand l'orbite est elliptique trois cas peuvent se présenter. Le grand axe diminue indéfiniment et devient nul au bout d'un temps fini, premier cas.

Si le grand axe ne devient nul qu'au bout d'un temps infini, le satellite tend asymptotiquement vers l'astre central. Théoriquement, il y arrive au bout d'un temps infini. Pratiquement, comme le rayon de l'astre central n'est pas négligeable, il y arrivera au bout d'un temps tout à fait fini. C'est pourquoi les solutions, asymptotiques mathématiquement, n'ont aucun sens pratique et ne donnent aucune solution cosmogonique.

Enfin le grand axe peut tendre asymptotiquement vers une limite. Cela aura lieu en particulier si la résistance dépend du temps et s'annule. Les orbites finissent par res-

ter alors sans changement. Il en serait de même si la résistance diminuait avec la distance[1].

La formule (17) montre immédiatement que la variation de l'excentricité est du même signe que cos $u$, qui est nul aux sommets du petit axe.

$\partial e$ est négatif, signe de $\partial v^2$, et l'excentricité décroît quand l'astre se trouve dans la moitié de sa trajectoire, située de part et d'autre du périhélie. L'excentricité croît quand l'astre est dans la moitié autour de l'aphélie. La variation de l'excentricité $e$ est maximum au périhélie et à l'aphélie, sur le grand axe. Elle est nulle aux sommets du petit axe, où l'excentricité passe par un maximum et un minimum à chaque révolution.

La somme des variations, pour une révolution entière peut donc être positive ou négative suivant les cas, l'excentricité peut croître ou décroître.

En précisant ces différents cas, on aboutit aux conclusions suivantes. (*C. R.*, t. 172, p. 267).

*L'excentricité d'une orbite elliptique ne varie pas, si la résistance est proportionnelle à la vitesse et indépendante de la distance,* ou bien *si elle est inverse de la distance et indépendante de la vitesse.*

*L'excentricité d'une orbite elliptique diminue et l'ellipse tend à devenir un cercle, si la résistance est proportionnelle à une puissance supérieure à l'unité pour la vitesse ou pour l'inverse du rayon. Dans le cas contraire l'excentricité augmente, l'ellipse s'aplatit de plus en plus et tend vers une droite, puisque le grand axe diminue indéfiniment.*

[1] M. J. Chazy a discuté la variation du grand axe dans le *Bull. ast.* t. 3, p. 239 (1923). Il a oublié ce dernier cas.

Dans le cas d'une orbite circulaire on verrait que le mouvement est stable dans le premier cas et instable dans le second.

Avec le développement en fonction de l'anomalie vraie $w$ on obtient des résultats beaucoup moins complets et beaucoup moins précis[1].

La formule (18) indique que la variation de la longitude du périhélie $\delta\alpha$ est proportionnelle à sin $w$. Elle est donc négative, avec $\delta v^2$, dans la première portion de la trajectoire, du périhélie à l'aphélie et il y a rétrogradation du périhélie. Elle est positive dans la seconde portion, de l'aphélie au périhélie, et le périhélie se déplace en sens contraire.

La perturbation étant petite, en *première approximation* les valeurs positives et négatives se compensent exactement. Au bout d'une révolution la longitude du périhélie reprend la même valeur. Elle n'a pas d'inégalités séculaires mais seulement des inégalités périodiques (Tisserand, p. 220, H. Poincaré, note p. 125).

M. Fatou, dans un intéressant article du *Bulletin astronomique*, p. 293 (1922) montre qu'en réalité il y a une accélération. Il est vrai que la formule dépend de l'excentricité $e$ qui est variable.

En tenant compte de cette variation, le sens de l'accélération reste douteux (A. Véronnet. *Bul. Astr.*, t. 4, p. 365).

8. **Etude de la résistance du milieu en fonction de la variation de la masse.** — Pratiquement la résistance

[1] F. Tisserand. — Mécanique Céleste t. 4 p. 221, et H. Poincaré Les Hypothèses Cosmogoniques, chapitre 6e.

éprouvée par le mouvement d'un astre tient uniquement à la rencontre d'autres masses libres. Si nous considérons un centre en formation, son atmosphère absorbe toutes les particules rencontrées, d'où accroissement de la masse et variation de la vitesse. Au point de vue cosmogonique c'est la seule façon d'envisager ce problème.

On peut supposer d'abord les particules du milieu immobiles. C'est une *hypothèse* simplificatrice, qui ne modifie pas l'allure des phénomènes, ce qui est le principal, et très peu leur ordre de grandeur ou leur vitesse. Elle s'impose d'ailleurs comme première approximation, dans l'ignorance où nous sommes de l'état des vitesses du milieu étudié. Nous verrons plus loin les modifications introduites par la considération des vitesses.

Les particules rencontrées étant immobiles, elles ne modifient ni la quantité de mouvement de l'astre, ni le moment de cette quantité.

La conservation des moments nous donne

$$m^2C^2 = m^2p\mu = C^{te} \tag{20}$$

$\mu = fM$ est proportionnelle à la masse M du corps central attirant. On la suppose constante. En réalité, dans la période de formation elle augmente, ce qui a pour effet de diminuer *dans la même proportion* les paramètres $p$ de toutes les orbites et de les condenser également. Cette étude a été faite par Faye dans son hypothèse [1].

En négligeant la variation de $\mu$ ou M on a

$$m^2p = m^2a(1 - e^2) = m^2q(1 + e) = C^t \tag{21}$$

[1] *Sur l'origine du Monde*, p. 158.

où $\rho$ désigne le rayon vecteur au périhélie

$$\rho = a(1 - e).$$

Cette formule nous montre tout de suite qu'un astre peut passer d'une orbite parabolique $e = 1$, à une orbite circulaire, $e = 0$, $\rho = r$, simplement par accroissement de masse dans le rapport $\sqrt{2}$, car on a

$$(22) \qquad rm'^2 = 2m^2\rho, \qquad m'^2 = 2m^2.$$

en passant de la parabole au cercle.

En prenant les dérivés logarithmiques de (21) on obtient les relations suivantes entre les variations des éléments

$$(23)\ 2\frac{\delta m}{m} = -\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta e^2}{1 - e^2} - \frac{\delta a}{a} = -\frac{\delta\rho}{\rho} - \frac{\delta e}{1 + e}.$$

La variation relative du paramètre de la conique est toujours deux fois plus rapide que celle de la masse.

La conservation des quantités de mouvement donne

$$(24) \quad m\delta v + v\delta m = 0, \qquad \delta v^2 = 2v\delta v = -2v^2\frac{\delta m}{m}.$$

Ces valeurs de $\delta v^2$ et $\delta m$ portées dans les formules (13), (17) (18) et (23) donnent, pour les variations des éléments, en fonction de la variation de la masse $\delta m$,

$$(25) \quad \frac{\delta a}{a^2} = -2\frac{v^2}{\mu}\frac{\delta m}{m}, \qquad \frac{\delta\rho}{\rho} = -2\frac{1 - \cos w}{1 + e}\frac{\delta m}{m}.$$

$$(26)\ \delta e = -2(e + \cos w)\frac{\delta m}{m}, \qquad \delta\alpha = -2\frac{\sin w}{e}\frac{\delta m}{m}.$$

Nous voyons immédiatement, sur ces formules, que la

variation de l'exentricité $e$ est maximum et celle de la distance périhélie $\rho$ est nulle au périhélie où cos $w = 1$.

$$(27) \qquad \frac{\delta\rho}{\rho} = 0, \qquad \delta e = -2(1+e)\frac{\delta m}{m}.$$

*Dans le cas d'une orbite parabolique*, où l'action de résistance a lieu surtout au voisinage du périhélie, il y aura *conservation de la distance périhélie et la variation de l'excentricité atteindra quatre fois celle de la masse.* Il suffira d'un accroissement de masse 0,01 pour amener l'excentricité de 1 à 0,96.

9. **Solution complète dans le cas où la densité du milieu est inverse du carré de la distance à l'astre central.** — C'est précisément ce cas qui se présente au voisinage d'un astre en formation. La diminution de l'excentricité $\Delta e$, pendant une révolution, peut alors s'exprimer très simplement en fonction de l'excentricité $e$ et de l'accroissement $\Delta m$ de la masse. On trouve, de plus, ce résultat intéressant, que cette variation relative est très sensiblement la même pour deux orbites extrêmes, voisines du cercle ou de la parabole, et pour toutes les orbites intermédiaires. On peut écrire

$$(28) \qquad \Delta e = 3\alpha e\frac{\Delta m}{m}, \qquad \frac{8}{9} < \alpha < 1;$$

$\alpha$ ne varie que de $\frac{1}{9}$. Il est fonction décroissante de $e^2$ et pourrait même s'écrire très exactement $1 - \frac{1}{9}e^2$.

Nous pouvons considérer alors la variation comme continue, car $\Delta e$ est supposé assez faible ; écrire $de$ et $dm$, et intégrer de $e_1$ à $e$. On obtient immédiatement, en tenant

compte de (28), l'expression du grand axe $a$, du paramètre $p$ et de la masse $m$ en fonction de l'excentricité $e$ ($\alpha'$ est la valeur moyenne de $\alpha$),

$$(29) \qquad \frac{p}{p_1} = \frac{a(1-e^2)}{p_1} = \frac{m_1^2}{m^2} = \left(\frac{e}{e_1}\right)^{\frac{2}{3\alpha'}},$$

$$\frac{8}{9} < \alpha < \alpha' < 1.$$

Le calcul montre que la masse sera comprise entre 1,20 et 1,30 de la valeur primitive quand l'excentricité sera réduite à 0,5. Elle sera comprise entre 2,16 et 2,37 pour $e = 0{,}1$. L'excentricité sera d'autant plus faible que la masse se sera accrue davantage.

Le grand axe se réduit à une valeur comprise entre 0,79 et 0,84 du paramètre $p_1$ pour $e = 0{,}5$ et entre 0,22 et 0,26 pour $e = 0{,}1$. Pour avoir un grand axe égal à 6,5 qui est le rayon de giration moyen du système planétaire, il suffira que le paramètre primitif de l'orbite ait été compris entre 14 et 17 pour donner une excentricité de 0,1. On a vu qu'on l'obtenait facilement par l'action des centres voisins. La distance du périhélie serait toujours décroissante dans la suite.

On peut calculer également l'augmentation de masse pour une révolution entière. Cette augmentation reste aussi sensiblement la même pour deux orbites extrêmes, ayant même paramètre $p$. Elle varie à peine du quart. Elle est croissante avec $e$. On peut écrire

$$(30) \qquad \Delta m = \frac{2\pi S D_1 r_1^2}{p}\beta, \qquad 1 < \beta < \frac{4}{\pi}.$$

$D_1$ est la densité du milieu à la distance $r_1$ et S la section droite de l'astre.

En considérant de même ici la variation comme continue, on peut exprimer $dm = \Delta m dn$ en fonction du moyen mouvement $n$. En faisant apparaître $m^2 p$ constant, et intégrant, on obtient

$$(31) \qquad \left(\frac{m_1}{m}\right)^{5/3} = 1 - \frac{5}{3}\beta' k n, \qquad k = \frac{2\pi S_1 D_1 r_1^2}{m_1 p_1}.$$

$\beta'$ est la valeur moyenne de $\beta$, comprise entre $\frac{4}{\pi}$ et 1, et $n$ est le nombre de révolutions écoulées pour accroître la masse de $m_1$ à $m$. Ce nombre serait toujours fini pour $m = \infty$ et le mouvement serait terminé. D'après (29) le nombre $k$ est égal à $\frac{3}{8}(1 - e_0)$ en désignant par $e_0$ l'exentricité acquise par une orbite parabolique au premier passage dans le milieu. Cette exentricité $e_0$, à l'origine, peut ainsi servir à définir le coefficient de résistance du milieu.

La différentielle de temps moyen $k dt = a\sqrt{a} dn$ peut finalement s'exprimer en fonction de $e$ au moyen des formules ci-dessus,

$$(32) \quad dt = \frac{84}{9\pi} \frac{p_1\sqrt{p_1}}{1 - e_0} \frac{1}{\alpha\beta e_1} \left(\frac{e}{e_1}\right)^{\gamma} \frac{de}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \left(\frac{5}{9} < \gamma < \frac{3}{4}\right).$$

On peut intégrer facilement pour les valeurs de $e$ voisines de 0 et de 1 et calculer le temps par intervalles fractionnés entre ces deux valeurs. Le temps nécessaire pour abaisser cette excentricité de 0,999 à 0,9 est 20 fois plus grand que pour l'abaisser de 0,1 à 0. En admettant que la variation d'excentricité au premier passage ait été de 0,01 ou $e_0 = 0{,}99$, avec un paramètre $p_1$ compris entre 14 et 17, on trouve qu'il a fallu de 80.000 à 160.000 ans

pour ramener le grand axe à la valeur 6,5 rayon moyen de giration du système planétaire. Il aurait fallu de 350.000 à 800.000 ans si la première variation de l'excentricité avait été réduite à 0,001 seulement.

On voit que les orbites primitivement paraboliques seront très facilement et très rapidement ramenées à être sensiblement circulaires, par l'action de la résistance du milieu.

10. **Calcul des conditions mécaniques réalisées par les éléments qui ont formé les planètes.** — Les formules ci-dessus permettent de déterminer complètement l'orbite d'un astre en mouvement dans notre milieu résistant. On pourra déterminer la masse, l'excentricité, le grand axe, etc., au bout d'un temps quelconque.

La densité autour du Soleil en formation a été déterminée au chapitre 8. Considérons la Terre elle-même tombant toute formée dans ce milieu, suivant une orbite parabolique, sa distance périhélie étant égale à sa distance actuelle. On trouve que la variation d'excentricité serait seulement de $10^{-8}$. L'orbite ne serait nullement modifiée par ce passage dans le milieu résistant.

Notre mobile va donc retourner à la même distance aphélie $\rho'$, en accomplissant une rotation en 4 millions d'années.

Les astres voisins, qui lui ont donné son premier moment de rotation n'auront pas changé sensiblement de position ni d'action. Son moment de rotation sera donc doublé. Il reviendra passer au voisinage du Soleil, mais à une distance périhélie double de la précédente. La résistance y serait quatre fois moindre, même si elle s'était

conservée intacte. L'orbite ne se rapprocherait jamais du Soleil, ne tendrait jamais à devenir circulaire.

Tel sera le cas de formation des étoiles doubles. Il aura suffi qu'il existe un centre de condensation secondaire assez éloigné du centre principal. La masse formée aura déjà un rayon considérable du même ordre que celui de l'astre central, en arrivant dans son voisinage. Elle conservera son orbite allongée. Il est vrai qu'elle entraînera avec elle toutes les particules qui formaient sa sphère d'action et qui pourront produire une résistance considérable.

Si on suppose au contraire une masse beaucoup plus faible, le $\frac{\Delta m}{m}$ étant inverse du rayon, d'après (30), sera plus grand et le $\Delta e$ également d'après (29).

Si ce $\Delta e$, par exemple, est alors de 0,1, l'excentrité et le grand axe varieront très vite et la masse tombera sur le Soleil en lui communiquant son moment de rotation.

Or le moment de rotation du Soleil est très faible par rapport à celui des planètes, 32 fois moindre. Il faut donc qu'une faible partie du premier lambeau, dévié par les centres voisins, se soit incorporé à lui.

On pourrait supposer que deux lambeaux ayant des moments de rotation inverse les ont sensiblement annulés. Ce serait une annulation trop précise pour ne pas supposer des conditions très particulières et improbables, des masses sensiblement égales, à 1/32 près, avec des moments de rotation sensiblement égaux, arrivant sensiblement en même temps. Il aurait fallu de plus que l'axe résultant des deux moments de rotation fut à peu près le même que celui du lambeau, qui a donné les planètes, car l'axe de rotation du Soleil ne fait qu'un angle de

7 degrés avec la normale au plan du maximum des aires.

Toutes ces conditions indiquent comme probable que *les planètes connues ont été formées ensemble et dans les mêmes conditions, aux dépens du même lambeau, provenant de la même région.*

Pour obtenir une variation de l'ordre 0,01 de l'excentricité au premier passage, il faut que le rayon des masses élémentaires, en arrivant au voisinage du Soleil, soit égal à $1{,}6 \times 10^{-6}$ de celui de la Terre. Cela correspond à des météorites d'un diamètre de 16 mètres pesant 25.000 tonnes.

Les météorites d'un diamètre 10 fois moindre, pesant seulement 25 tonnes, ont vu leur excentricité diminuer de 0,1 au premier passage. Leur grand axe a diminué très vite et elles sont tombées rapidement sur le Soleil.

Celles d'un diamètre 10 fois plus grand, pesant 27 millions de tonnes ont eu une excentricité diminuée de 0,01 seulement, si leur paramètre était égal à 1, et de 0,001 avec un paramètre $p_1 = 10$, c'est-à-dire en passant 10 fois plus loin du Soleil.

On voit facilement ainsi quelles sont les conditions moyennes à remplir pour qu'il y ait eu capture réelle des éléments du milieu. Ces conditions sont très larges puisqu'une variation de 1.000 fois la masse n'entraine qu'une variation de 10 fois dans l'excentricité au premier passage.

On peut remarquer encore que toute rencontre de deux particules, ou météorites, qui s'agglomèrent donne une nouvelle orbite dont l'excentricité est moindre[1].

[1] F.-R. Moulton. *Introduction to Astronomy*, p. 435. New-York (1917).

L'orbite résultante est même circulaire si les deux orbites primitives sont opposées, c'est-à-dire si les grands axes coïncident après avoir tourné de 180 degrés.

De plus, dès que l'excentricité sera assez faible, 0,1 par exemple, l'ensemble des particules qui ont même paramètre forme un *anneau asssez étroit* qui finalement se condensera en une seule masse (*Bul. astr.*, t. 4. p. 387).

11. **Cas des orbites circulaires. Limites de variation des distances des planètes**[1]. — Si on considère des orbites sensiblement circulaires on aura pour la formule du moment des quantités de mouvement

$$(33)\quad m^2 r = m_1^2 r_1 \quad \text{ou} \quad m^{2k} r = m_1^{2k} r_1, \quad \left(1 < k < \frac{4}{3}\right)$$

suivant que les planètes sont immobiles, ou animées de vitesses quelconques. Nous ne considérons que le premier cas, le second n'en différant pas beaucoup dans les résultats.

Si la densité de l'astre mobile reste constante, quand sa masse augmente, la relation précédente devient, en désignant par R son rayon,

$$(34)\quad r\mathrm{R}^6 = r_1 \mathrm{R}_1^6 = \mathrm{C}^{te}$$

Le rayon de l'orbite varie en raison inverse du carré

[1] Alex. Véronnet. Variation des distances et des masses d'un système planétaire dans un milieu résistant. *Bul. astr.* t. 1 (1921). Note présentée au *Congrès des Mathématiciens suisses*, à Bâle, 8 mai 1921.

de la masse, ou en raison inverse de la 6e puissance du rayon de l'astre.

On obtient ensuite pour l'équation du mouvement, si la densité du milieu suit la loi générale $Dr^n = D_1 r_1^n$,

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)^{n+1/3} = 1 + \left(n + \frac{1}{3}\right)\eta_1 t \qquad (35)$$

$\eta_1$ étant une constante. Si la densité est constante on a $n = 0$. On voit par cette formule que le rapport des distances de deux planètes consécutives ne reste pas constant, mais varie avec le temps. Par conséquent, *toute loi exponentielle des distances planétaires*, analogue à celle de Bode (Gaussin, Belot, Armellini, Raynaud, Dufton, *ne s'applique plus à l'origine, si l'on admet que les planètes se sont formées dans un milieu résistant quelqu'il soit.* Ces rapports sont conservés au contraire, quelles que soient les distances de formation, si l'on tient compte seulement de la variation de la masse centrale attirante, comme le faisait Faye.

Si on considère deux planètes, la planète pour laquelle $\eta$ est plus grand, en valeur absolue, se rapproche plus vite du Soleil et rattrappera l'autre à la distance $r$, si elle en est plus éloignée. Si elle en est moins éloignée, la distance $r$ indique la distance commune et maximum d'où elles seraient parties autrefois. On peut admettre alors qu'elles n'ont pas pu se former au delà.

Le tableau suivant donne les distances de rencontre des différentes planètes avec la Terre, la première ligne, dans l'hypothèse d'une densité constante, la deuxième dans le cas d'une densité inverse du carré de la distance. Les deux lignes relatives à la vitesse de rappro-

chement $\eta$ se rapportent aux mêmes cas, celle de la Terre est prise pour unité.

| | Merc. | Vénus | Mars | Jupiter | Saturne |
|---|---|---|---|---|---|
| $r =$ | 1,56 | 3,47 | 0,734 | 9,13 | 75,3 |
| $r =$ | 1,19 | 1,75 | — | 6,04 | 15,0 |
| $\eta =$ | 3,91 | 1,34 | 2,19 | 0,17 | 0,30 |
| $\eta =$ | 25,7 | 2,57 | 0,95 | 0,006 | 0,003 |

Résultat curieux : dans le cas d'un milieu résistant, Mars seul se rapprocherait de la Terre pour la rejoindre à la distance 0,73, dans le 1er cas. Dans le second cas il y aurait indétermination pour Mars, car sa vitesse relative de rapprochement du Soleil serait sensiblement égale à celle de la Terre, 0,95 voisin de 1.

Toutes les autres planètes s'éloigneraient de la Terre, Mercure et Vénus se rapprochant plus vite du Soleil que la Terre ; Jupiter et Saturne s'en rapprochant moins vite. Mais les distances maximum, correspondant à la rencontre de la Terre, seraient très voisines des distances actuelles, quelle que soit la variation admise pour la loi des densités.

En remontant dans le passé, les planètes seraient plus éloignées du Soleil, on trouverait que Mercure aurait rejoint la Terre entre la distance 1,19 et 1,56. De même la Terre aurait rejoint Jupiter entre les distances 6,04 et 9,13. Il y aurait eu d'ailleurs auparavant rencontre de Mercure et de Vénus, de Mars et de Jupiter. On voit que *les planètes n'ont pas pu être formées définitivement à des distances considérables des distances actuelles*, sauf dans le cas où ce serait la masse centrale seule du Soleil qui aurait varié en les rapprochant toutes également.

Les calculs pratiques montrent que la résistance du milieu n'a pas pu modifier beaucoup les distances actuelles des planètes au Soleil, tout en modifiant peut-être plus sensiblement les *rapports* de ces distances, pour Mercure et Vénus en particulier.

En admettant une légère modification de ces distances, par l'action du milieu, on accorde mieux les distances de ces deux dernières planètes avec une loi exponentielle. En admettant une modification assez considérable, on détruirait complètement l'harmonie de la loi exponentielle à l'origine des planètes. Nous n'avons en tout cas aucun motif de croire que cette loi empirique des distances soit une loi nécessaire et mathématique, qui se soit conservée telle depuis les origines.

## CHAPITRE XII

### ÉTUDE CRITIQUE DES HYPOTHÈSES COSMOGONIQUES MODERNES

1. **Le double problème qui se pose.** — L'astronomie moderne est née avec la découverte de la loi de Newton. La gravitation, à elle seule, expliquait tous les mouvements des astres, la stabilité des orbites, le retour périodique des comètes. Elle expliquait même la forme et l'aplatissement des planètes. Elle déterminait en somme les mouvements et la constitution physique des astres dans le présent. Mais les formules mathématiques pouvaient aussi légitimement s'étendre dans le passé et dans l'avenir. Elles pouvaient permettre d'étudier l'évolution des astres aussi loin qu'on voulait, ou même de remonter jusqu'à leur formation.

Les essais furent nombreux. Il faut tâtonner longtemps pour découvrir une voie nouvelle et la prolonger jusqu'au but. H. Poincaré a fait passer la question dans le domaine scientifique en faisant de l'étude critique de ces essais l'objet de son cours de Sorbonne. Il nous servira de guide ici.

D'ailleurs le problème de l'origine du monde était double, Il comprenait le problème général de l'origine des étoiles et de tout le monde stellaire et le problème particulier de l'origine du système solaire, avec son cortège de planètes.

On a d'abord essayé de résoudre le problème particulier,

comme s'il était indépendant du problème général. On n'avait alors d'ailleurs que des connaissances très vagues sur la structure du monde stellaire. On s'est contenté d'étudier le seul système connu, le nôtre. On a cru que c'était un cas particulier, même tout à fait exceptionnel. Au lieu de remonter à une cause générale, on a imaginé des causes particulières. des hypothèses particulières, capables d'expliquer ce phénomène. On a eu ainsi, depuis LAPLACE, beaucoup de cosmogonies solaires, trop uniquement solaires.

Nous connaissons mieux la structure générale de notre monde. Nous savons que les étoiles se groupent en amas, qui sont peu condensés dans notre immense Voie Lactée, *amas ouverts*, plus condensés déjà, *amas globulaires*, sur les bords de la Voie Lactée. Plus en dehors encore, en dehors du Monde des étoiles qu'est notre système stellaire de la Voie Lactée, nous trouvons le monde des Nébuleuses spirales, qui paraissent étroitement apparentées aux amas stellaires, qui paraissent même issues d'amas plus avancés dans leur évolution.

Il fallait déblayer le terrain et fractionner les problèmes qui se posent. Nous avons vu déjà dans les chapitres précédents comment on peut étudier le problème de la formation d'un astre dans une nébuleuse indéfinie, la formation d'un nombre quelconque d'astres, leur condensation progressive en amas, enfin comment l'étude des perturbations, causées par les astres voisins, rend compte de la déviation de certains éléments, et de la rotation des planètes autour du Soleil.

Il faut avouer que les auteurs de cosmogonies ont peu tenu compte des conditions physiques. En général, ils n'ont fait que l'étude mathématique, ou mécanique, du

problème. C'était plus simple, et peut-être suffisant, pour une première approximation. D'ailleurs, dans la constitution physique, comme dans l'évolution, c'est encore la gravitation qui joue le principal rôle, pour constituer le corps de l'astre. Les autres conditions physiques, comme la température, ne sont toutes que secondaires. Nous n'avons aucune théorie spécialement physique faite par des physiciens pour la constitution, l'évolution ni surtout la formation des astres. Elles sont toutes avant tout des théories mécaniques.

2. **Hypothèse de Kant.** — Après la découverte du vrai système du monde et de ses lois par COPERNIC, KÉPLER et NEWTON, le premier qui ait essayé de donner une explication scientifique de son origine et de sa formation est incontestablement le philosophe de Kœnigsberg dans sa *Théorie du Ciel* (1775) [1]. Son ouvrage et ses idées cosmogoniques furent tardivement connues en France et le sont encore bien peu. Et cependant toutes les idées essentielles des autres cosmogonies se trouvent déjà ici, l'idée de l'origine commune de la Terre, du Soleil et des planètes : l'idée fondamentale de la nébuleuse primitive, c'est-à-dire l'état de dispersion de leurs éléments en une sorte d'immense nuage cosmique : la formation du Soleil par la majeure partie des éléments attirés directement au centre par la seule attraction newtonienne ; la formation des planètes dans le même plan, tournant dans le même sens, sur des orbites presque circulaires, par les autres élé-

[1] KANT était un lithuanien et non un Prussien. Il avait alors 25 ans. WOLFF a donné la traduction de son ouvrage à la suite de ses *Hypothèses cosmogoniques*.

ments qui, déviés du centre, avaient tourné autour de lui avec des vitesses croissantes, tout cela se trouve déjà textuellement dant KANT, qui étend son explication à la formation des satellites, des planètes, des anneaux de Saturne et des autres étoiles.

De plus, il a le grand mérite dans son œuvre de ne faire aucune hypothèse spéciale. Il se contente de la matière et de son attraction. Il en déduit tous les mouvements et toutes les formations. « Donnez-moi de la matière et j'en ferai un monde », s'écrie-t-il, peut-être avec un peu de présomption.

KANT suppose que la matière qui forme actuellement les planètes, le Soleil et les autres étoiles, était primitivement réduite à l'état de poussière impalpable et invisible dispersée à l'infini dans l'espace, actuellement vide, où roulent ces différents astres.

Dans un ensemble de masses soumises à des forces attractives, le repos dans l'uniformité est instable. Tout centre de condensation devient centre d'attraction.

Supposons plusieurs molécules centrales répandues dans notre poussière cosmique homogène, chacune deviendra pour son propre compte un centre d'attraction.

Si maintenant nous supposons que ces molécules centrales n'étaient pas réparties uniformément, leurs attractions réciproques ne se feront pas équilibre. Elles vont s'attirer les unes les autres, mais sans aucune symétrie. Chacun des centres, attiré par tous, ne va se diriger vers aucun. Nous aurons des mouvements irréguliers qui vont se traduire par des tourbillons et des rotations.

« Or, dans les mouvements qui devaient résulter de la chûte inégale de ces corps, les résistances produites entre

les particules se gênant les unes les autres, n'ont pu être si parfaitement les mêmes en tout sens, qu'il n'en soit résulté ça et là des déviations latérales. » Mais POINCARÉ soulève ici une grosse objection : « Les affirmations de KANT sont en contradiction formelle avec le principe des aires, d'après lequel le moment de rotation du système soustrait à toute action extérieure est constant : ce moment de rotation doit rester toujours nul s'il l'est initialement. Il est donc impossible qu'un système partant du repos ait engendré le système solaire pour lequel le moment de rotation n'est pas nul. » Sans doute, mais précisément, KANT ne suppose pas du tout le système solaire isolé et « soustrait à toute action extérieure », mais comme l'un seulement des nombreux systèmes d'étoiles, soumis à l'action de tous les autres systèmes. L'ensemble de tous ces systèmes aura donc pu partir du repos, et leur moment de rotation total pourra être nul, sans que celui du Soleil le soit.

KANT explique ensuite comment la vitesse de ces éléments, animés d'un mouvement de rotation, est allée en s'accélérant sous l'effet de la gravitation, jusqu'à ce que la force centrifuge contrebalance l'attraction : comment ils se sont groupés en anneaux circulaires dans le plan équatorial pour y former des planètes. Tout y est scientifiquement déduit et LAPLACE ne dira pas mieux.

KANT essaie d'expliquer la rotation des planètes sur elles-mêmes et la rotation des satellites autour des planètes dans le même sens que la rotation des planètes autour du Soleil, ce qui est la règle à peu près générale dans le système solaire.

Mais ici se présente une difficulté que KANT a fort bien vue et qu'il a résolue d'une façon très ingénieuse et aussi

satisfaisante qu'on peut le désirer en ces sortes de matières. Nos particules qui décrivent des cercles autour du Soleil ont des vitesses d'autant plus faibles qu'elles sont plus loin du Soleil, suivant en cela les lois de KÉPLER. Supposons donc qu'il se forme un centre d'attraction en un point quelconque. Les particules qui circulent au-dessous de ce point vont plus vite que lui. Si elles sont captées, elles vont passer devant le centre et tourneront autour de lui, ou le feront tourner, en sens inverse de sa rotation autour du Soleil. Mais comme le remarque très bien KANT, il faut tenir compte de l'attraction de la planète en formation.

« L'attraction de la planète, en effet, force les particules plus voisines du Soleil, qui circulent avec une vitesse linéaire plus grande, à quitter déjà de loin la direction de leur route et à s'élever au-dessus de la planète par une sinuosité allongée. Ces particules qui possèdent un plus grand degré de vitesse que la planète elle-même, lorsqu'elles sont amenées à tomber par son attraction, donnent à leur chûte et en même temps à la chûte des autres une déviation de l'ouest vers l'est » (p. 171).

La solution demanderait à être vérifiée au point de vue mathématique, Elle est ingénieuse. En tout cas on constate que les 15 comètes captées sont toutes à mouvement direct, comme celui des planètes. L'entraînement d'une masse à forte attraction tend donc à communiquer aux particules sur lesquelles elle agit, son propre mouvement dans le même sens.

A propos des satellites, KANT se demande pourquoi la Lune tourne toujours la même face immobile du côté de la Terre. Par une intuition vraiment géniale il donnait la solution de ce problème en renvoyant à un mémoire

précédent (1754) où, le premier également, il démontrait que les marées devaient nécessairement ralentir la rotation de la Terre. Ici l'effet est très faible.

Cette action des marées, déterminées par le voisinage de la Terre, est au contraire très considérable sur la Lune, et LAPLACE, après KANT, a expliqué ainsi le ralentissement progressif de sa rotation. KANT ajoutait : « Si l'on peut résoudre ce problème pour une seule planète l'application s'en fera d'elle-même aux autres ». Or, d'après SCHIAPARELLI, les planètes Mercure et Vénus, les plus rapprochées du Soleil, tournent également toujours la même face vers lui. Ce serait donc des satellites du Soleil. On comprend très bien que son action prépondérante ait pu ralentir à ce point leur vitesse. L'explication de KANT pour la Lune s'y applique tout naturellement.

KANT essaye ensuite d'expliquer pourquoi le plan équatorial de certaines planètes, en particulier la Terre, Saturne et Mars, et le plan de rotation de leurs satellites (sauf pour la Lune) est considérablement incliné sur le plan de leur orbite. « On doit peut-être attribuer la cause de cette inclinaison à l'inégalité des mouvements de la matière qui s'est condensée pour former la planète [1]. » Cette explication en vaut une autre.

D'ailleurs KANT sait avouer modestement ce qui laisse à désirer dans son essai d'explication. Il ajoute ici : « Je reconnais sans peine que cette partie de mon travail qui regarde la position des axes des planètes est encore incomplète et certainement bien loin de pouvoir être soumise au calcul géométrique. J'aime mieux faire sincèrement cet aveu, plutôt que de chercher à étayer cette portion de

[1] Trad. de WOLF, p. 174. LAPLACE donnera la même explication.

ma doctrine sur des subtilités qui compromettraient la solidité de tout l'ensemble » (p. 177).

KANT entre ensuite dans quelques détails pour expliquer la formation de l'anneau de Saturne du corps même et de l'atmosphère de la planète. Ce chapitre est particulièrement intéressant parce qu'on y trouve textuellement toutes les idées et toutes les données que LAPLACE n'aura qu'à appliquer au Soleil, pour en déduire la formation de ses anneaux.

KANT suppose seulement qu'à une certaine époque, l'atmosphère de Saturne s'est trouvé échauffée et dilatée par cette chaleur.

Comme les comètes, Saturne se serait approché tout près du Soleil ; de là cette élévation de température et la dilatation qui en est résultée.

« Je suppose que Saturne possédait un mouvement de rotation autour d'un axe et rien que cela me suffit pour expliquer le mystère... Les vapeurs qui s'élevaient de la surface de Saturne conservaient leur mouvement propre et continuaient à circuler librement, à la hauteur où elles étaient montées. Mais seules ces particules pouvaient se maintenir en mouvement circulaire libre et constant, qui étaient soumises, en raison de leur distance à l'axe, à une attraction capable d'équilibrer la force centrifuge résultant de leur rotation autour de l'axe. Les autres, pour lesquelles ce rapport exact n'existait pas, ou s'éloignaient de la planète en vertu de leur excès de vitesse, ou retombaient sur elle, si leur vitesse se trouvait en défaut [1] ».

[1] C'est bien là le théorème attribué à LAPLACE sur la limitation des atmosphères des planètes. FAYE l'avait déjà fait remonter à KANT (*C. R.*, 21 avril 1884, p. 949), mais sans citer la référence.

Les particules, disséminées dans toute l'étendue de la sphère de vapeur, devaient, dans leur révolution, en vertu de la loi des forces centrales, venir couper, dans un sens ou dans l'autre, le plan de l'équateur prolongé de la planète, et, se rencontrant dans ce plan, en venant de l'un à l'autre hémisphère, elles s'y arrêtaient réciproquement et s'y accumulaient.

Kant donne également de l'origine des comètes une théorie fort plausible. Elles se sont formées dans les régions les plus éloignées de la nébuleuse solaire primitive, et des matières les plus légères. Elles n'ont donc pas été entraînées dans la rotation générale des éléments qui ont fourni les planètes tournant dans le même sens et dans le même plan. C'est pour cela que leurs orbites sont très excentriques et situées dans n'importe quel sens, sauf pour les plus voisines qui ont subi l'entraînement des planètes.

Kant explique de la même façon la formation des queues de comètes, l'aurore boréale et la lumière zodiacale, par « l'action répulsive des rayons solaires », (p. 192) qui repousse les éléments les plus légers, de la comète, de l'atmosphère terrestre, ou de sa propre atmosphère.

Pour Kant, la Voie Lactée et les étoiles visibles ne forment qu'un système d'étoiles, analogue au système solaire avec son cortège de planètes et de comètes. Les nébuleuses ne sont que d'autres Voies Lactées plus éloignées, et ceci à l'infini. Kant enfin dans un superbe envol poétique, appuyé sur d'excellentes considérations scientifiques de régénération de la chaleur, voyait les mondes se former sans cesse dans l'Infini de l'espace et du temps, puis les mondes morts renaître de leurs

cendres, des humanités de plus en plus parfaites suivre l'évolution des mondes, et répondant de plus en plus à l'attirance et au souffle d'en Haut, s'élever toujours davantage dans la contemplation du Beau, la possession du Vrai et la réalisation du Bien.

3. **Hypothèse de Laplace.** — Laplace a exposé ses idées sur la formation du système solaire, dans une note insérée à la fin de son *Exposition du système des mondes* (1796). Il ne s'occupe que de notre système et non de l'ensemble de l'Univers. On dit couramment en France « la nébuleuse de Laplace ». Cependant Laplace n'a pas inventé la nébuleuse, puisque Kant, avant lui, et les Anciens avant Kant, avaient essayé de remonter jusqu'à la dispersion primitive des éléments pour en déduire le monde actuel. Mais depuis la découverte du véritable système du monde et de ses lois, Laplace fut le premier en France à essayer de remonter jusqu'à l'origine de la formation du Soleil et des planètes.

D'ailleurs Laplace n'a donné de son hypothèse qu'une exposition d'ensemble assez rapide, et c'est une explication plutôt vulgaire que scientifique, car il ne l'a soumise à aucun calcul, et l'on n'y trouve aucune formule de mathématique. Tout le travail scientifique relatif à cette hypothèse a été fait après Laplace par les critiques ou les défenseurs de ses idées.

La plupart de ses défenseurs n'ont pu la sauver d'ailleurs qu'en la défigurant, en abandonnant pas mal de détails et en revenant pour les points essentiels à des idées plus voisines de Kant que de celles de Laplace.

Laplace suppose qu'à l'origine l'atmosphère du Soleil, dilatée par la chaleur, s'est étendue jusqu'à

Neptune, la plus éloignée des planètes. Le Soleil et son atmosphère tournaient tout d'une pièce avec la même vitesse. Puis l'atmosphère s'est condensée en se refroidissant, sa vitesse de rotation a augmenté, la force centrifuge à l'équateur est devenue égale à l'attraction. Les particules de l'équateur ont donc continué à tourner librement suivant des cercles en formant des anneaux analogues à l'anneau de Saturne. Ensuite la matière de chacun de ces anneaux s'est condensée à son tour pour former les planètes et leurs satellites.

Il faut remarquer, d'abord que LAPLACE ne songe à expliquer que la formation du système solaire, sans s'occuper des autres étoiles. Sa théorie sera donc forcément très incomplète et applicable seulement à ce cas particulier et pas du tout au système des étoiles doubles ou triples par exemple.

LAPLACE base tout son système sur le refroidissement de l'atmosphère. Il a besoin, au début, d'une chaleur excessive, dont il n'explique pas l'origine. D'ailleurs aucune chaleur possible ne permet d'expliquer une pareille dilatation.

Il suppose le Soleil et son atmosphère animés déjà d'un mouvement de rotation uniforme. Il n'essaye pas d'expliquer l'origine de ce mouvement de rotation. Il ne le pouvait pas d'ailleurs en ne considérant que le système solaire seul.

LAPLACE considère l'atmosphère du Soleil comme un véritable gaz, dans lequel les molécules frottent les unes sur les autres de manière à égaliser leur vitesse. Il ne s'était pas rendu compte de l'extrême raréfaction du gaz, raréfaction telle que les molécules devaient être considérées comme isolées. KANT avait fait ce calcul,

pour un cas de son hypothèse. Il arrivait à conclure que la densité du milieu était 30 millions de fois plus faible que celle de l'air (p. 162).

Aussi KANT regardait-il les molécules comme libres, en introduisant seulement une répulsion, due à leur choc ou à leur voisinage immédiat. Tous les autres auteurs ont abandonné le gaz de Laplace, pour les molécules libres de KANT, surtout depuis les travaux de FAYE.

Ainsi le milieu primitif admis par Laplace n'est pas même une nébuleuse, c'est une simple atmosphère formée d'un gaz élastique. Même, dans les premières éditions de son ouvrage, il regarde le Soleil comme déjà tout formé et entouré d'une atmosphère. C'était pour lui quelque chose d'analogue aux nébuleuses planétaires d'HERSCHELL. Il ne donnait aucune explication de la formation de la masse du Soleil par la condensation des éléments primitifs dispersés.

C'est en 1811 qu'HERSCHEL expose à la Société royale de Londres sa théorie d'après laquelle les nébuleuses simples se condensaient d'abord en nébuleuses planétaires avec noyau central, puis finalement en étoiles, par l'achèvement de la condensation [1]. A partir de cette époque LAPLACE adopte complètement les vues d'HERSCHELL, et il ajoute à sa théorie que la masse du Soleil, si l'on remonte plus haut, devait être elle-même dispersée, à l'état de nébuleuse [2]. Cette idée appartient sans conteste à HERSCHELL.

LAPLACE rejette ensuite l'hypothèse où les planètes se

[1] *Phil. Transaction*, 1811, pp. 269 et suivantes.

[2] Œuvres complètes de LAPLACE, t. 6, p. 500. Gauthier-Villars, 1884.

seraient formées à l'intérieur de cette atmosphère, car, dit-il, « sa résistance les aurait fait tomber sur le Soleil ». Mais cette résistance était extrêmement faible comme la densité du milieu. Elle n'aurait fait que régulariser leur orbite en la rendant plus circulaire. Elle leur aurait permis de se former plus vite, en leur permettant de balayer plus rapidement tout l'espace voisin. Cette idée, envisagée déjà par KANT, reprise par FAYE, semble beaucoup plus explicative et soulève beaucoup moins d'objections que celle des anneaux homogènes et privés de tout centre d'attraction.

Voici comment LAPLACE arrive à ses anneaux : A mesure que le refroidissement resserre l'atmosphère et condense, à la surface de l'astre, les molécules qui en sont voisines, le mouvement de rotation augmente, en vertu du principe des aires. La force centrifuge due à ce mouvement devenant ainsi plus grande, le point où la pesanteur lui est égale se trouve plus près de ce centre. En supposant donc, ce qu'il est naturel d'admettre, que l'atmosphère s'est étendue à une époque quelconque jusqu'à sa limite et aux limites successives produites par l'accroissement de la rotation du Soleil, les molécules abandonnées ont continué à circuler autour de cet astre, puisque leur force centrifuge était balancée par la pesanteur.

Les planètes se forment ensuite par la rupture de ces anneaux, après que les vitesses se seront égalisées par le frottement, d'où la rotation directe des planètes.

LAPLACE donne ensuite aux comètes une origine étrangère au système solaire, ce qui n'est plus admis aujourd'hui. La lumière zodiacale est le résidu de l'atmosphère solaire primitive. Il explique le cas de la Lune, l'égalité

des vitesses angulaires de rotation et de révolution, comme l'avait fait déjà KANT, par la résistance due aux marées.

LAPLACE explique par une cause analogue le fait que le mouvement des trois premiers satellites de Jupiter est lié par une relation rigoureuse. Cette cause c'est la résistance du milieu, que présentait alors l'atmosphère de la planète, et qui a rendu rigoureuse une relation approchée.

Il établit la nécessité de la nébuleuse pour expliquer la position et le mouvement des planètes, sur le fait que ces mouvements (ceux alors connus) étaient dans le même plan et dans le même sens.

LAPLACE ajoutait : « Des phénomènes aussi extraordinaires ne sont pas dus à des causes irrégulières. En soumettant au calcul leur probabilité, on trouve qu'il y a plus de deux cent mille milliards à parier contre un, qu'ils ne sont point l'effet du hasard, ce qui forme une probabilité bien supérieure à celle de la plupart des événements historiques [1] ». Il y avait la même probabilité à parier que tout nouvel astre du système devrait avoir un mouvement concordant avec l'ensemble. Cependant, comme le faisait remarquer FAYE, la seule planète découverte dans la suite a un mouvement de rotation rétrograde, ou du moins son satellite. Il en est de même des derniers satellites découverts, autour de Jupiter et de Saturne.

4. **Critique de l'hypothèse de Laplace.** — On a fait voir depuis longtemps que la condensation de la nébuleuse de LAPLACE devait être, dès le début, déjà très avancée. BABINET en 1861 (*C.R.*, t, 51, p. 481), puis TROWBRIDGE en 1864, montraient, qu'au moment de la forma-

[1] *Exposition du système des mondes*, t. 2, p. 509.

tion de la première planète, Neptune, le rayon de giration de l'ensemble devait être déjà très proche du centre et ne pas dépasser la moitié de la distance de Mercure, la planète la plus rapprochée du Soleil [1]. La plus grande partie de la masse totale devait donc déjà à ce moment-là être condensée à l'intérieur de l'orbite actuel de Mercure.

Fouché, en 1884, introduit des précisions nouvelles [2]. Il fait la somme du moment de rotation totale du Soleil et des planètes ; moment de rotation qui reste invariable. Si l'on suppose un noyau condensé entouré d'une atmosphère homogène, s'étendant jusqu'à Neptune, et tournant avec la vitesse actuelle de cette planète, la masse de cette atmosphère devra être à peine supérieure à la masse totale des planètes. Poincaré dit à ce propos : « Il faudrait donc que l'atmosphère tout entière de la nébuleuse se fût réduite en planètes, si cette atmosphère avait été homogène ».

Et il ajoute : « Les calculs précédents ne sont relatifs qu'à des ordres de grandeur : mais ils suffisent pour montrer combien est capital, dans la théorie de Laplace, le fait de la condensation centrale [3] ».

On peut préciser encore ces calculs. Dans le cas d'une densité homogène la masse de l'atmosphère serait seulement égale à 1,76 de celle des planètes et à 3,17 dans le cas d'une condensation maximum [4].

[1] Voir *Scientia*, t. 10, p. 381, un article de F. W. Henkel, et « On the nebular hypothesis », *Journal of Sciences*, 2e série, t. 38, p. 344. en traduisant les résultats en rayons de l'orbite terrestre on trouve ici pour le rayon de giration : 0,146.

[2] *Comptes rendus de l'Ac. des Sciences*, t., 99, p. 903.

[3] Poincaré, *Les hypothèses cosmogoniques*, p. 21.

[4] A. Véronnet, *Les hypothèses cosmogoniques modernes*, chez Hermann, p. 57.

Le calcul établit un point plus intéressant encore. La densité de cette atmosphère devrait être alors, par rapport à celle de l'eau, de $2 \times 10^{-14}$, ou environ 100 milliards de fois plus petite que celle de l'air. Ce ne serait plus un gaz où les molécules frottent et appuient les unes sur les autres, mais une sorte de matière radiante, des milliers de fois plus rare que celle qui reste dans les tubes où l'on a fait le vide de Crookes. Un rayon lumineux parti du Soleil et traversant la nébuleuse tout entière rencontrerait une masse de gaz 130 fois moindre que ceux qui traversent l'atmosphère de la Terre. Ces nombres sont à retenir. On voit combien le refroidissement aurait été rapide puisqu'aucun obstacle ne se serait opposé au rayonnement.

Laplace pense que cette atmosphère du Soleil s'est dilatée immensément sous l'influence d'une « chaleur excessive ». Il faut que cette chaleur excessive soit entretenue continuellement, car autrement la masse ainsi dilatée se refroidirait presque instantanément par le rayonnement.

Or, à la distance de la Terre on trouve que la température produite par le Soleil est voisine de 300° absolus. Reportons-nous à notre nébuleuse. Pour maintenir gazeux à cette distance les éléments qui forment la masse de la Terre : fer, cuivre, etc... les expériences de Moissan démontrent qu'il faut la température du four électrique, c'est-à-dire 3.000°. C'est une température 10 fois plus grande que la température actuelle, et la loi de Stefan nous montre que pour l'entretenir, il fallait que la quantité de chaleur reçue du Soleil fût 10.000 fois plus grande, qu'actuellement.

Or, avec une dépense 10.000 fois plus intense, la nébuleuse n'aurait pas pu se maintenir gazeuse plus de

5.000 ans, et il ne resterait plus rien pour les périodes géologiques.

Si maintenant nous calculons la quantité de chaleur nécessaire pour maintenir à l'état gazeux les éléments situés à la distance de Neptune, les 5.000 ans se réduiraient à quelques années seulement.

Un tel ensemble, si spécialisé, a-t-il pu donner naissance à des anneaux? Je laisse ici la parole à Wolff, un des défenseurs les plus autorisés de Laplace : « D'après Laplace, les planètes sont actuellement aux distances mêmes où se sont détachés les anneaux. Il faudrait donc qu'après la formation du premier anneau, celui de Neptune, par exemple, la nébuleuse se fût contractée, sans nouvelle perte de matière, jusqu'à l'orbite d'Uranus, c'est-à-dire à un rayon à peu près moitié. Pourquoi un pareil état d'équilibre, persistant pendant de longues périodes, séparées par un brusque renversement du rapport de la gravité à la force centrifuge [1]? »

Il est bien clair qu'une loi quelconque de la variation de la densité d'une nébuleuse, du centre à la circonférence, si elle reste la même pendant la contraction, ne peut donner lieu à de telles alternatives. M. Faye a démontré en effet (*Comptes rendus*, t. 90, p. 570 : 1880) que dans de telles conditions, une nébuleuse à condensation centrale, où l'on suppose un décroissement des densités aussi rapide que l'on voudra, n'aurait jamais abandonné la moindre parcelle de sa masse en se contractant. M. Kirkwood (*Monthly Notices of R. A. S.*, t. 29, p. 96) considère les choses autrement et fait voir que l'équilibre une fois troublé, n'a pas dû se rétablir : et que par

[1] *Les hypothèse cosmogoniques*, pp. 37, 38.

suite une continuelle succession d'anneaux étroits ont dû se détacher très proches les uns des autres : telle est aussi la conséquence du mode de contraction indiqué par Newcomb.

M. Roche est le seul, je crois, qui ait cherché à rendre compte des ruptures brusques d'équilibre à des moments déterminés [1].

Cette explication la voici. La nébuleuse se refroidit par la surface. La matière superficielle se contracte et rentre dans la nébuleuse en tombant vers le centre. La vitesse de rotation augmente alors progressivement et un anneau se détache. La surface mise à nu se refroidit à son tour, se contracte, la formation cesse, et ainsi de suite. Mais, nous avons vu que le milieu est si peu dense (ce dont Roche ne s'était fait aucune idée) que le refroidissement de toute la masse serait pour ainsi dire instantané, refroidissement en profondeur et non en surface. On aurait alors, non plus un gaz, mais une nébuleuse, où les molécules isolées tomberaient en vertu de l'attraction seule.

C'est d'ailleurs la conception même où Roche est amené par la force des choses, comme le reconnait Poincaré. Il faut supposer que cet anneau est formé par des poussières météoriques, tenues en suspension par le gaz de la nébuleuse [2].

On ne peut donc pas obtenir des anneaux distincts et séparés comme ceux de la boule d'huile dans l'expérience de Plateau. Mais supposons même qu'on en obtienne, ils ne pourraient pas subsister et s'évanouiraient comme une bulle de savon qui crève.

[1] Nous avons vu l'étude des surfaces de Roché et de la formation des anneaux dans le plan équatorial, ch. 5.

[2] *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, p. 28.

Poincaré démontre en effet, en poussant plus loin les calculs de Roche et en tenant compte de la masse de la nébuleuse, que l'on peut obtenir une figure d'équilibre, contenant des anneaux libres dans le plan équatorial (expérience de Plateau). Il donne en même temps « une limite inférieure de la densité de cet anneau et *a fortiori* de la nébuleuse pour que cet anneau puisse subsister. Or, dit-il, « lorsqu'on prend la vitesse angulaire de Neptune, on trouve pour (densité) un chiffre tellement grand que, d'après ce chiffre, la masse totale de la nébuleuse serait très supérieure à celle du Soleil » (p. 23). Comme au contraire cette masse ne peut guère dépasser celle des planètes, les anneaux hypothétiques de Laplace ne peuvent pas subsister. De plus, des anneaux composés de fragments isolés, sans condensation amorcée, n'auraient aucune tendance à se concentrer, comme le montre le fait de la permanence de l'anneau de Saturne et des petites planètes. Des fragments tant soit peu éloignés n'arriveraient donc pas à se souder.

De plus, les fragments qui circuleraient presque sur la même orbite, au point de se frôler, avec probabilité de se réunir l'un à l'autre, mettraient un temps infini à se rejoindre. C'est ce qu'avait déjà montré Kirkwood (*Proceedings of the Amer. Phil. society*, avril 1880). Deux fragments de l'anneau de Neptune, situés sur des orbites distants de 1.000 kilomètres, et à l'opposé l'un de l'autre, auraient mis 250 millions d'années avant de se rejoindre, à la condition expresse, en plus, que les deux orbites fussent absolument identiques, ce qui n'offre aucune probabilité.

Wolff qui cite ce fait ajoute : « Cette objection est capitale. Mais il faut remarquer qu'elle s'applique à tout

système qui fera naître les planètes de la condensation d'anneaux, extérieurs ou intérieurs à la nébuleuse solaire. »

LAPLACE admettait que la nébuleuse se contractait lentement par refroidissement, en augmentant progressivement sa vitesse de rotation, et que les frottements égalisaient cette vitesse en la rendant uniforme dans toute la masse. En un mot, sa nébuleuse tourne tout d'une pièce ou à peu près. Il croyait que cela était nécessaire pour expliquer la rotation des planètes dans le sens direct. On a vu au chapitre précédent que cela n'était pas nécessaire du tout.

Or, l'uniformisation des vitesses par frottement est très longue, excessivement longue à établir. HELMOLTZ a démontré qu'un faible accroissement de vitesse de la Terre mettrait plus de 40 mille ans pour se propager, réduit de moitié à 8 kilomètres de hauteur dans notre atmosphère supposée parfaitement calme. POINCARÉ montre facilement qu'il faudrait $10^{22}$ années, c'est-à-dire 10.000 milliards de milliards d'années pour que, dans la nébuleuse de LAPLACE, un accroissement de mouvement puisse se propager du centre à Neptune ou réciproquement. Et encore cet accroissement de vitesse serait réduit de moitié.

Est-ce tout? Pas encore. Quand une partie de la nébuleuse en se refroidissant et en se contractant aura augmenté sa vitesse, il faudra qu'elle cesse de se refroidir et de se contracter pendant des milliards et des milliards d'années qui vont suivre, car autrement sa vitesse croîtrait continuellement sans arriver jamais à se propager qu'en faible proportion et les vitesses seraient loin d'être uniformes. On ne voit aucun phénomène qui permette de suspendre le refroidissement et la contraction pendant des milliards

d'années, aucun phénomène par conséquent qui permette de réaliser cette égalisation si désirable des vitesses. On a vu d'ailleurs qu'avec la faible densité de l'atmosphère ce refroidissement aurait été instantané.

D'ailleurs nous avons une preuve expérimentale que le temps même, ni aucune autre cause, ne suffit pas pour uniformiser les vitesses dans un corps qui se contracte, qui évolue, car dans le Soleil même nous retrouvons encore des vitesses de rotation sensiblement différentes.

Poincaré déclare donc nettement que « l'explication de Laplace est insuffisante » (p. 51) pour rendre compte du mouvement de rotation directe des planètes. Comme Wolff, il recourt alors à la théorie des marées, mise en avant déjà par Roche et étudiée ensuite surtout par G.-H. Darwin et que nous verrons plus loin.

J.-H. Jeans a repris et discuté toutes ces difficultés et il en a conclu nettement que l'hypothèse rotationnelle ne pouvait pas expliquer la formation du système solaire et ceci s'applique à l'hypothèse de Laplace, à celle de Faye, comme à toutes celles qui voudraient faire sortir le système planétaire de la rotation d'un autre système qui les contiendrait dans son sein [1].

Il considère qu'il y a deux moyens de rupture par rotation, celui de Poincaré et Darwin, déduit des figures dérivées des ellipsoïdes homogènes et celui de Laplace et Roche. Il met le problème en équation dans les différents cas. Il montre que le cas d'une masse homogène compressible se ramène à celui d'une masse homogène, que le cas d'une masse hétérogène se ramène à des couches homo-

[1] The part played by rotation in cosmic evolution. *Monthly notices* t. 77, p. 186-199 (1917) et *Problems of Cosmogony*.

gènes dont les conditions d'équilibre peuvent être déterminées.

Il montre que dans le cas de masse homogène l'égalité de la force centrifuge et de l'attraction ne peut avoir lieu qu'aux cas limites du disque et de l'aiguille et que la formation d'un satellite ne peut avoir lieu que par segmentation sur les figures dérivées.

Pour le gaz d'une atmosphère il y a un autre cas possible, celui de Roche. Dans le cas d'homogénéité la quantité $h$ du chapitre I avait une valeur maximum de 0,187. Dans le cas de Roche, masse très condensée, elle atteint 0,36. Dans les cas intermédiaires de masse hétérogène normale, la valeur doit être intermédiaire. Le moment total du système solaire nous donne $h = 0{,}0117$, valeur beaucoup trop petite. En supposant l'atmosphère du Soleil étendue jusqu'à Neptune, on aurait eu pour le rayon de giration de l'ensemble $k^2 = 0{,}0013\, r^2$ c'est-à-dire une condensation très prononcée, comme on l'a vu. Enfin il renverse l'argument de Poincaré sur la densité superficielle trop grande exigée pour la séparation d'un anneau, en calculant le rayon du Soleil nécessaire pour ce fractionnement, il trouve un rayon égal à 0,16 du rayon actuel, ce qui est impossible.

Il en conclut que le fractionnement n'a pu agir au point de vue cosmogonique que dans le cas d'un moment cinétique beaucoup plus grand que celui du système solaire, comme par exemple pour les étoiles doubles, où dans le cas de masses beaucoup plus grandes, comme pour les nébuleuses spirales.

5. **Hypothèse de Faye. Formule et calculs de M. Maillard.** — Cet astronome de grand talent a exposé

ses idées cosmogoniques dans plusieurs *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et surtout dans son beau livre sur *L'Origine du Monde* (1884).

Il montre d'abord que si la nébuleuse primitive qui a formé le Soleil et les planètes s'étendait seulement dix fois plus loin que Neptune, sa densité devait être 250 millions de fois moindre que celle de l'air qui reste dans le vide de la machine pneumatique. Un tel milieu ne pouvait être qu'obscur et froid. Les éléments n'exerçaient aucune pression les uns sur les autres, et n'étaient soumis qu'à leurs attractions mutuelles, Ce ne pouvait absolument pas être un gaz chaud, et la nébuleuse de LAPLACE était définitivement condamnée par ce simple calcul. FAYE retrouvait au contraire ainsi tous les éléments de la nébuleuse de KANT. Depuis lors tous les auteurs qui se sont occupés de cosmogonie ont considéré la chose comme jugée. Aucun d'eux n'a plus admis à l'origine une nébuleuse gazeuse et chaude, une nébuleuse de LAPLACE.

Mais si FAYE revient ainsi et tous les astronomes avec lui, à la nébuleuse de KANT, il n'essaye pas comme celui-ci, d'expliquer scientifiquement les mouvements de rotation. « Ces matériaux, soumis d'ailleurs à leur attraction mutuelle, étaient, dès le commencement, animés de mouvements divers qui en ont provoqué la séparation en lambeaux ou nuées. Ceux-ci ont conservé une translation rapide et des gyrations intestines plus ou moins lentes » (p. 258). Ce sont des mouvements tourbillonnaires analogues à ceux des nébuleuses spirales.

Mais c'était précisément ces différences de vitesse qu'il fallait expliquer, par la seule notion des différences d'attraction dans un milieu imparfaitement homogène. FAYE, au contraire, considère ces différences de vitesse comme

originelles et données. Il est évident qu'un jour ou l'autre, par la condensation des éléments, elles aboutiront à une rotation, puisque les moments cinétiques se conservent. En tout cas l'analogie avec les tourbillons de l'air ou de l'eau est purement extérieure et artificielle.

Il pense que « notre petit monde solaire, aux mouvements presque exactement circulaires... est un cas très particulier » (p. 182). Aussi pense-t-il que « la nébuleuse solaire a été primitivement homogène et sphérique » (p. 187.)

Comme on le voit FAYE introduit dans sa nébuleuse des conditions de régularité bien spéciales et qui n'avaient guère de chance d'être réalisées, surtout dans les débuts. Ces conditions spéciales exigeraient d'ailleurs une cause spéciale et une explication spéciale que FAYE ne donne pas.

FAYE remarque alors que dans une nébuleuse homogène la pesanteur varie proportionnellement à la distance au centre, et l'équilibre des molécules exige que leur vitesse varie suivant la même loi. Nous n'avons plus les lois de KÉPLER. Une nébuleuse homogène peut tourner tout d'une pièce avec la même vitesse. L'équilibre pourra s'établir, mais seulement dans le plan équatorial, entre la force centrifuge et l'attraction. Nous aurons alors des anneaux analogues à ceux de Laplace, mais intérieurs à la nébuleuse au lieu d'être extérieurs, et tournant tout d'une pièce au lieu que chaque molécule suive les lois de KÉPLER. Ces anneaux en se brisant donneront naissance à des planètes, tout comme dans l'hypothèse de LAPLACE, mais ici elles tournent nécessairement dans le sens direct.

C'était là, d'ailleurs, le but principal de FAYE. Pour lui, les anneaux extérieurs de LAPLACE ne pouvaient donner que

des planètes à rotation rétrograde. Il a voulu trouver un système d'anneaux qui puisse donner naissance à des planètes dont la rotation serait certainement directe. Il y a réussi incontestablement, mais peut-être inutilement.

Faye montre ensuite comment la nébuleuse, d'abord homogène, se modifie par suite de la condensation de la plupart de ses éléments vers le centre pour former le Soleil. Au début l'attraction y variait proportionnellement à la distance. A la fin, dans l'état actuel, elle varie en raison inverse du carré de la distance. Dans l'intervalle, elle a dû suivre une loi intermédiaire. A la fin de l'évolution, les particules, circulant en équilibre sur les anneaux, suivaient les lois de Képler, étaient de véritables anneaux de Laplace et les planètes formées à cette époque devaient être à rotation rétrograde, d'après Faye, puisque les particules externes allaient moins vite que les particules internes de l'anneau.

Aussi pense-t-il que les deux planètes les plus éloignées, Uranus et Neptune, dont les satellites sont rétrogrades, ont dû se former les dernières, à la fin de l'évolution, après toutes les autres planètes à rotation directe.

Faye montre également que si la densité de la nébuleuse est croissante à partir du centre, comme avec les formules admises pour la Terre, la pesanteur croîtra d'abord avec la distance jusqu'à un maximum, pour décroître ensuite jusqu'à la surface. La loi de rotation des anneaux, intérieurs à la zone du maximum, donnerait des planètes directes, la loi de rotation des anneaux extérieurs donnerait des planètes rétrogrades. Il ne serait plus nécessaire de faire intervenir une question de temps. Mais on se heurte toujours à la question de la concentration des anneaux en planètes.

Ainsi pour FAYE la Terre serait formée avant le Soleil lui-même, elle serait plus ancienne que le Soleil. FAYE essaie de résoudre par là une difficulté opposée par les géologues aux astronomes. Avec le système de FAYE, en effet, la Terre a pu se former et évoluer depuis plus de cent millions d'années et le Soleil depuis moins de 30 millions, et tout le monde est content. Nous avons vu, à propos de l'évolution spéciale du Soleil et de la Terre, combien la difficulté signalée est illusoire.

Citons encore les lignes où POINCARÉ retourne contre FAYE les conclusions du calcul des probabilités : « il aurait volontiers parié, à son tour, que les satellites se mouvront toujours autour de leurs planètes respectives dans le sens de rotation de celles-ci. Lui aussi il aurait perdu : on connaît aujourd'hui des satellites qui circulent autour de Jupiter et de Saturne, dans le sens rétrograde » (p. 74).

Le fait est que la formation de ces deux satellites, les plus éloignés, ne rentre dans aucune théorie classique. Il faut en faire des cas isolés et spéciaux, et POINCARÉ se rallie ici à la théorie qui semble bien la plus naturelle et la plus simple. Ces satellites se sont formés en dehors de la planète et ils ont été captés par elle dans la suite.

FAYE avait fait remarquer que dans la nébuleuse primitive homogène la loi d'attraction était proportionnelle à la distance, tandis qu'à la fin de la concentration on retrouvait la loi de Newton en raison inverse du carré de la distance. Il admettait que dans l'intervalle, pendant la concentration, la loi d'attraction intermédiaire pouvait être représentée par une somme des deux autres

$$F = ar + \frac{b}{r^2}.$$

M. Maillard a recherché quelle serait la forme exacte d'une loi d'attraction, qui donnerait des coniques telles que le centre d'attraction serait toujours compris entre le centre de la conique et son foyer. Il a trouvé la formule

$$F = -\frac{\mu m r}{(\alpha^2 + \beta\sqrt{r^2 - \alpha^2})^3}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes. Pour $\beta = 0$ la force est proportionnelle à $r$. Le centre des coniques coïncide avec le centre d'attraction, c'est le cas de l'homogénéité. Pour $\alpha = 0$ on a la loi de Newton et le foyer coïndice avec le centre d'attraction.

Il utilise cette loi pour essayer d'en déduire la formation des anneaux. La force F n'est réelle que pour $r > \alpha$. « Le changement de régime amène la séparation d'un anneau. » Ce n'est pas très sûr. Si F est imaginaire pour $r > \alpha$, c'est que la formule ne s'applique plus au voisinage du centre. C'est une autre formule qui doit s'appliquer. Il est regrettable seulement que celle-ci ne soit pas plus générale. On ne peut pas en conclure que les particules vont s'isoler bénévolement en anneau dès que la formule n'est plus applicable [1].

Elle conduit à des résultats intéressants. La même loi permet en effet d'expliquer le déplacement du périhélie de Mercure, ce qui détermine les coefficients $\alpha$ et $\beta$. Ces mêmes coefficients expliquent aussi l'accélération du mouvement de la Lune, ce que n'explique pas la formule de

[1] *Formation du système des mondes*, chez Gauthier-Villars 1897. Ce volume contient un excellent résumé de la nouvelle théorie, par l'abbé Th. Moreux, directeur de l'Observatoire de Bourges.

la relativité, ni la correction de l'exposant de la loi de Newton proposée par Newcomb.

6. **Hypothèse du colonel du Ligondès** [1]. — L'état physique de la nébuleuse est le même que celui de Kant et de Faye, un ensemble de particules indépendantes et froides soumises seulement à leurs attractions mutuelles. Mais Faye introduisait des mouvements d'ensemble, aboutissant à des mouvements tourbillonnaires en rotation : Kant, au contraire, faisait partir les éléments du repos et expliquait tous leurs mouvements par la seule attraction ; Du Ligondès admet que dans la nébuleuse les mouvements des molécules se font en tous sens et sont abandonnés au hasard. « Pour nous, nous ne comprenons guère une théorie cosmogonique dans laquelle les mouvements initiaux ne seraient pas abandonnés au hasard » (p. 15).

Sans doute, si l'on admet le mouvement comme donné, mais une théorie scientifique doit expliquer le mouvement lui-même et tous les mouvements, autant que cela est possible. Nous ne pourrons jamais tout expliquer, c'est certain, nous rencontrerons toujours le mystère assez tôt. « Le monde est plein de mystères », disait Poincaré, mais nous ne devons jamais nous arrêter à moitié chemin, ni appeler Dieu ou le hasard à notre secours avant d'avoir fait l'impossible pour surprendre les secrets de la machine.

M. du Ligondès disait : « le repos n'est qu'un cas particulier du mouvement » (p. 15). C'est vrai au point de vue purement mathématique, car alors on a : $v = 0$ ; mais ce n'est plus vrai au point de vue physique, car ce qui est en mouvement n'est pas en repos, et réciproque-

ment, et tout mouvement a besoin d'une cause qui l'explique. La cause du mouvement est une force. Tout mouvement représente une énergie positive. Le repos non. Il faut une cause explicative de cette énergie. Il faut indiquer la source de cette énergie.

Cette nébuleuse générale s'est ensuite fragmentée. « Ce chaos s'est partagé en lambeaux qui ont donné naissance par voie de condensation progressive à tous les mondes de l'Univers... Les mouvements intérieurs absolument quelconques et dirigés en tous sens ont provoqué nécessairement des déchirures au sein du chaos. Certaines régions se sont vidées au profit des autres... Ces lambeaux possédaient un double mouvement de translation générale et de circulation interne » (p. 17). Ces déchirures ne paraissent pas possibles. En effet, si les mouvements sont laissés au hasard, il y en aura autant dans un sens que dans l'autre.

Même en supposant que la nébuleuse générale puisse se fragmenter en nébuleuses partielles, comme la condensation est excessivement lente, elles formeront longtemps un ensemble où l'on ne pourra pas légitimement considérer chaque unité comme isolée et soustraite à l'attraction des autres. C'est cependant ce que fait du Ligondès, qui finalement s'occupe uniquement de la nébuleuse solaire isolée.

Il demande alors à cette nébuleuse de réaliser beaucoup de conditions spéciales pour donner naissance au Soleil et aux planètes : « Supposons qu'il ait existé dans l'immensité de ce chaos une région relativement peu agitée, dont la matière ait été répartie d'une façon sensiblement uniforme, et où la circulation, presque égale en tous sens, se soit faite, en outre, sans trop changer la

disposition générale des éléments. Nous avons tout lieu de croire que les premiers rudiments du monde solaire se sont formés dans une telle région. »

Il faut donc, une forme à peu près ronde, une densité grossièrement homogène, et une circulation interne presque symétrique. Nous retrouvons l'hypothèse de Faye, moins le mouvement tourbillonnaire.

De plus, dans la nébuleuse du colonel du Ligondès, les mouvements qui ont lieu au hasard, ne sont pas livrés complètement à l'arbitraire. Autrement ils auraient lieu indistinctement en tout sens, et le moment de rotation serait nul. Il admet donc une prépondérance de la circulation dans un certain sens, juste ce qu'il faut pour nous donner le moment de rotation du système solaire. Ce moment est pris comme donné et non expliqué.

En tout cas, on doit à M. du Ligondès l'étude scientifique d'une nébuleuse ainsi constituée et déjà aplatie. Il démontre que l'on aura pour trajectoires des ellipses qui se déforment, analogues aux courbes de Lissajous, qui résultent de la superposition de deux ou trois mouvements périodiques rectangulaires.

De plus, l'aplatissement une fois commencé ira en s'accentuant. C'est là une contribution très intéressante à l'étude des nébuleuses dans un cas particulier, et qui restera. C'est un premier jalon pour l'étude scientifique complète du problème. Ce n'est d'ailleurs pas le seul que l'on doive à cet auteur, qui fait, certes, autorité en la matière.

Mais si les mouvements restaient toujours les mêmes dans notre nébuleuse homogène, elle persisterait ainsi indéfiniment sans se concentrer. La concentration se produit peu à peu, grâce aux chocs des molécules qui dimi-

nuent leur force vive et leur vitesse moyenne. Finalement il y aura condensation sur l'équateur, comme pour les anneaux de Laplace, mais avec une double circulation en sens contraire. Les chocs contribueront enfin à former les planètes, en ne laissant subsister que l'excès de rotation dans un sens.

En tout cas, un calcul simple montre que, si l'on étend la nébuleuse à 100 000 fois la distance de la Terre au Soleil, la traversée de cette nébuleuse de part en part par une molécule, équivaudrait seulement à la traversée d'une couche d'air de 3 mm. Le nombre de chocs ou demi-chocs y serait le même, environ 30.000 pour les trajectoires les plus longues, et la traversée exigerait 32 millions d'années. On voit à quel point la perte de force vive serait excessivement lente, chaque molécule subissant au plus un choc tous les mille ans.

Poincaré complète cette étude en assimilant la nébuleuse à une masse gazeuse libre, et lui appliquant les calculs de la théorie cinétique. Il en déduit qu'il n'y aura pas tendance à la formation d'un noyau central très condensé. « S'il se produit en un point une petite condensation anormale, elle tend à disparaître d'elle-même » (p. 94).

Disons enfin que M. du Ligondès explique la rotation directe ou rétrograde des planètes de la même façon que Faye, par la loi de la variation de la pesanteur. Il dit aussi « La masse des planètes, leur âge, l'inclinaison de leur axe, le sens et la durée de leur rotation et, en général, tous leurs éléments seront déterminés d'après leur distance au Soleil, comme conséquence mécanique de la forme initiale du lambeau chaotique » (p. 27). Ce seraient ainsi des fonctions d'une seule variable.

POINCARÉ dit très justement à ce propos : « D'autre part, il semble prématuré de chercher à rendre compte, par des considérations *a priori*, des lois qui lient les masses des planètes aux grands axes de leurs orbites, à la durée de leur rotation, au nombre et à la répartition de leurs satellites. Si ces considérations étaient justifiées, elles devraient s'appliquer aux systèmes planétaires, qui entourent toutes les étoiles et tous ces systèmes devraient être identiques, ce qui est bien peu vraisemblable » p. 115. Telle est sa conclusion. Ce sera aussi la nôtre.

7. **Hypothèse de M. Belot** [1]. — Cette hypothèse diffère complètement de toutes les autres, en ce que l'auteur au lieu de faire naître le système solaire d'une nébuleuse unique le fait naître de la rencontre et de la compénétration de deux nébuleuses distinctes. C'est, peut-on dire, l'hypothèse dualiste. Une nébuleuse étroite et allongée en forme de tube, ou de colonne de fumée, mais lancée avec une vitesse énorme, et tournant en même temps sur elle-même, comme un obus, pénètre dans une autre nébuleuse plus vaste, plus diffuse, sans forme définie et animée seulement d'un mouvement de translation.

Il se produit donc entre les deux un véritable choc. Le tube-tourbillon va vibrer comme un obus qui frappe une plaque de blindage, il s'y formera des nœuds et des ventres de vibration. comme dans la colonne d'air d'un tuyau d'orgue ouvert. Ces ventres de vibrations vont pénétrer à leur tour dans la nébuleuse, s'y épanouir,

[1] *Essai de cosmogonie tourbillonnaire* Gauthier-Villars, 1911, ainsi que de nombreuses notes et articles des *C. R.* et de l'*Astronomie*.

comme une balle de plomb qui rencontre un obstacle en tourbillonnant. Chaque ventre de vibration va donner naissance à une planète. Enfin le reste de la matière du tube-tourbillon va s'écraser, se réunir en une seule masse qui sera le Soleil.

Cette hypothèse est curieuse, mais ce qui la rend vraiment intéressante, c'est que son auteur aboutit à des formules qui donnent, avec une précision remarquable, la loi des distances des planètes et des satellites, la loi des inclinaisons des axes de rotation et de la vitesse de rotation des planètes, etc. Il est vrai que c'est souvent au prix d'hypothèses arbitraires. En tout cas, ces formules traduisent très nettement les relations expérimentales observées, on peut dire qu'elles sont réelles. Mais il y a toujours plusieurs manières d'expliquer le même fait. Il se peut que l'on trouve une explication physique plus simple et plus naturelle des mêmes formules et des mêmes lois. Elles seront en tout cas un guide précieux pour les recherches futures.

On voit cependant tout ce que l'hypothèse primitive contient encore d'inexpliqué. D'où viennent ces deux nébuleuses ? Comment ont-elles acquis ces formes spéciales, ces vitesses spéciales ? On ne le sait pas. M. Belot a besoin pour son tube-tourbillon d'une vitesse énorme qu'il « estime peut-être un peu arbitrairement » (Poincaré, p. 273), à 75.000 kilomètres par seconde. On ne voit d'ailleurs aucune cause au monde capable d'imprimer une pareille vitesse d'ensemble à une masse gazeuse [1].

[1] M. Belot a montré dans la suite que cette vitesse peut être considérablement réduite. Il compare cette vitesse à celle des rayons cathodiques, mais nous ne connaissons dans l'Univers aucune

Un corps qui tomberait de très loin sur le Soleil acquerrait une vitesse maximum de 612 kilomètres à la seconde, mais dès qu'il s'en éloignerait, comme les comètes, il la perdrait. De plus, le Soleil est une masse très condensée. La vitesse maximum qu'il pourrait communiquer décroîtrait avec l'augmentation de son rayon, en même temps que la densité. Des nébuleuses ne peuvent donner que des vitesses très faibles à des masses extérieures.

De plus, il faut tenir compte des conditions physiques de la nébuleuse. Nous avons vu que la nébuleuse de M. du Ligondès, étendue jusqu'à 100.000 fois la distance de la Terre au Soleil, n'offrait pas, dans sa plus grande largeur, plus de résistance qu'une couche d'air de 3 millimètres d'épaisseur, au choc des molécules. Le tube-tourbillon de M. Belot traverserait donc sans s'en apercevoir une pareille nébulosité.

Quoiqu'il en soit, M. Belot calcule la forme que prendra le tourbillon en s'épanouissant dans le nuage cosmique. Il considère que la seule force agissante est la résistance du milieu. M. Poincaré lui reproche de ne pas tenir compte de l'attraction, en particulier de celle du Soleil, qui se forme en même temps que les planètes. On ne conçoit guère, en effet, une explication cosmogonique où on laisserait de côté l'attraction. M. Poincaré remarque encore que M. Belot « pose, peut-être un peu arbitrairement » (p. 125), la loi de vitesse d'épanouissement du tourbillon et il ajoute : « Nous avons traité les différentes masses comme si elles étaient indépendantes,

*machine* capable de lancer les atomes ou les molécules dans une même direction avec ces vitesses,

et l'on ne voit pas bien pourquoi elles se trouveront finalement à peu près dans un même plan (celui de l'écliptique). Si les calculs de M. Belot le conduisent à expliquer, en apparence, ce fait important, c'est par suite d'hypothèses qui paraissent mal justifiées, et auxquelles l'auteur n'aurait jamais songé, s'il n'avait pas connu ce résultat d'avance » (p. 275). Enfin il conclut : « Si ces idées ne semblent pas pouvoir être acceptées sous leur forme actuelle, il semble qu'il peut être utile de les faire connaître, parce qu'on pourra un jour y trouver à glaner d'intéressantes vérités » (p. 279).

8. **Hypothèse de M. l'abbé Moreux.** — Cette nouvelle hypothèse toute récente a été exposée dans l'*Origine et la formation des mondes* [1]. C'est une hypothèse dualiste, qui se rattache à celle de M. Belot. Il y a encore au début le choc d'un astre contre une nébuleuse, mais le mécanisme de formation diffère.

Le titre de l'ouvrage semble indiquer une cosmogonie générale, qui s'appliquerait à l'ensemble des astres, comme celle de Kant. Mais l'essai d'explication des nébuleuses spirales est fait seulement pour la nébuleuse qui a engendré le système solaire. Il ne semble pas qu'il puisse s'appliquer aux véritables nébuleuses spirales, qui sont certainement des systèmes plus compliqués que nos étoiles simples, ou même doubles, et sont probablement de l'ordre de grandeur des amas stellaires.

M. l'abbé Moreux suppose un astre déjà en partie condensé et animé d'un mouvement de translation et de rotation. Il rencontre, sous un certain angle, un immense

[1] Chez O. Doin, 1922.

courant de météores, analogue aux courants d'étoiles. C'est en beaucoup plus grand la rencontre de la Terre avec le courant des Léonides, donnant les étoiles filantes du 13 novembre. Les particules rencontrées ou attirées s'accumuleraient en avant et en arrière, formant fuseau. Une rotation rapide du noyau les disperserait en éventail, nébuleuse planétaire. Une rotation lente les répartirait sur deux spires incurvées, nébuleuse spirale.

Les calculs sont empruntés à un travail de E. W. Brown[1], mais tous deux négligent les actions mutuelles des particules et ne considèrent l'action de l'astre qu'en deçà d'une certaine distance constituant sa sphère d'action. Or, il semble que ceci est légitime, si on évalue l'énergie cinétique, produite par l'attraction mutuelle, qui dépend du carré de la vitesse, mais ne l'est plus si l'on veut étudier la vitesse elle-même avec la forme des trajectoires. D'ailleurs une cosmogonie doit expliquer les vitesses de translation et les vitesses de rotation et non pas les prendre toutes données.

Dans l'hypothèse, la rotation de l'astre primitif entraînerait progressivement les matériaux qui l'entourent et qui tombent vers lui. La vitesse linéaire des particules croîtrait d'abord en s'éloignant du centre, passerait par un maximum, pour décroître ensuite suivant la troisième loi de Kepler. Nous aurions ici une répartition des vitesses analogue à celle de la nébuleuse de Faye. Il y aurait une tendance à la rotation directe jusqu'à une certaine distance de l'astre, et au delà une tendance à la rotation rétrograde. Mais cette commu-

[1] Passage d'une étoile à travers une nébuleuse (*Astroph. Journal*, 1921).

nication de la rotation du noyau à la nébuleuse par diffusion serait tout aussi aléatoire que dans la nébuleuse de LAPLACE.

En tout cas on ne peut pas dire que, pour les météores éloignés « les vitesses étant moindres, leur mouvement relatif peut être considéré comme rétrograde » (p. 68), ceci pour expliquer les mouvements de sens contraire des nébuleuses spirales. Ici les mouvements seraient tous directs par rapport au centre, tous rétrogrades, par rapport à la zone de vitesse maximum.

Les spires étant constituées, la formation des planètes est expliquée par un balancement de l'axe de rotation du noyau qui oscille sous l'apport irrégulier des matériaux extérieurs. Ce balancement se communique progressivement aux sphères et y produit des cassures doubles, qui donnent naissance à des planètes jumelles : Neptune et Uranus, Saturne et Jupiter, etc.

Les satellites dériveraient des nébuleuses, ou des amas qui ont formé les planètes, mais ici la rotation aurait toujours été rétrograde au début, pour expliquer la rotation rétrograde des derniers satellites de Jupiter et de Saturne. Elle serait devenue directe par l'action de freinage des marées dues au Soleil, comme dans la théorie de DARWIN. Mais le cas est tout différent.

Pour l'auteur, les petites planètes seraient des astéroïdes, qui se rattacheraient aux comètes, intermédiaires entre celles-ci et les autres planètes. Elles n'auraient, semble-t-il, pas besoin d'une formation spéciale. Il pense avec raison qu'il ne faut pas actuellement chercher à tout expliquer, depuis les masses, jusqu'aux inclinaisons et aux excentricités.

L'ensemble de la théorie repose sur des considérations

probables, ou problématiques, d'après lesquelles telle action agira dans tel sens plutôt que sur des démonstrations proprement dites. Les calculs mathématiques portent davantage sur les détails que sur les bases de la théorie. L'auteur déduit immédiatement de la constance de $\Sigma m\omega r^2$ la constance de $r^2\theta$ et il en conclut que les particules suivent une spirale de Cotes ou *lituus* (p. 80). De même, quand il discute les différentes lois des distances planétaires, il montre que la loi des densités, dans sa nébuleuse, est inverse du carré de la distance, comme la gravitation. Il en conclut un peu rapidement que « la loi des intervalles planétaires est une conséquence des lois de la gravitation » (p. 163).

La théorie présente ceci d'intéressant et de spécial qu'elle essaie d'expliquer la nébuleuse qui a donné naissance au système solaire et de la rattacher à un phénomène général. Elle présente également des vues d'ensemble, des tableaux ou des illustrations très suggestifs, qui lui donnent encore plus de clarté et d'intérêt.

9. **Hypothèse de M. See** [1]. — La théorie précédente pouvait s'appeler la théorie du choc, celle-ci est la théorie de la capture. « Pour M. See, les planètes n'ont pas du tout été formées par des fragments de la nébuleuse solaire, et la Lune ne provient pas d'un fragment de la nébuleuse terrestre. Les planètes sont, d'après lui, d'origine cosmique extérieure à la nébuleuse solaire : ce sont des corps étrangers qui venant à passer dans le voisinage du Soleil, ont été captés par lui. De même la Lune a été,

[1] Researches on the evolution of the stellar systems. The capture theory : Traduction, chez Hermann, 1910.

à une certaine époque captée par la Terre » (POINCARÉ, p. 117). Les nébuleuses spirales proviennent de même de la capture réciproque de deux nébuleuses qui se sont fusionnées.

Evidemment cette théorie est très incomplète, car on se demandera : D'où venaient donc ces planètes et ces satellites? où et comment s'étaient-ils formés? Mais ce qui rend cette théorie vraiment intéressante, c'est que M. SEE a fort bien vu que l'attraction seule ne pouvait pas expliquer le phénomène. Certaines comètes, en effet, arrivent à frôler le Soleil sans être retenues par lui dans son voisinage. Il faut une autre cause qui vienne aider l'attraction. Cette autre cause n'est pas autre chose que la résistance du milieu, que KANT avait déjà mise en avant pour régulariser la trajectoire de ses molécules et de ses planètes.

M. SEE étudie donc scientifiquement l'influence d'une résistance assez faible sur la trajectoire d'une planète. Il démontre alors que cette trajectoire tendra tout naturellement à devenir circulaire, en même temps que la planète va se rapprocher du Soleil et accroître sa vitesse.

Si la résistance avait continué plus longtemps, la planète aurait fini par se rapprocher du Soleil et s'incorporer à lui. C'est cette crainte qui a fait rejeter par LAPLACE l'hypothèse de la formation des planètes à l'intérieur de la nébuleuse.

Mais si l'on admet au contraire avec M. SEE que les planètes se sont formées en dehors de la nébuleuse, on ne peut pas expliquer pourquoi elles se meuvent dans le même sens, et dans le même plan, et non en tout sens comme les comètes. « La théorie de M. SEE rend bien compte de la faiblesse des excentricités des planètes et des

satellites. Mais pourquoi les mouvements de presque tous ces astres sont-ils directs, et pourquoi leurs orbites ont-elles de faibles inclinaisons mutuelles ? Ces deux questions restent, dans l'hypothèse de M. See, sans réponse bien satisfaisante » (Poincaré, p. 128).

Poincaré émet deux essais de réponses, par exemple l'hypothèse d'une nébuleuse aplatie qui n'aurait capté les astres que dans le sens de sa plus grande épaisseur. Mais les inclinaisons des planètes sont tellement faibles que cette nébuleuse aurait dû être réduite à un vrai cercle aplati.

En supposant en second lieu le milieu lui-même en rotation, et dont le mouvement aurait orienté celui des planètes par l'entraînement, il faudrait lui donner une vitesse plus grande que celle des planètes, et alors son moment de rotation serait beaucoup trop considérable. Il faudrait en conclure que les planètes se sont formées à l'intérieur de la nébuleuse et ont participé dès l'origine à l'entraînement de son mouvement de rotation.

10. **Hypothèse de G. H. Darwin** [1]. — On peut l'appeler la théorie des marées, parce que Darwin explique par l'action de ce phénomène la plupart des transformations cosmogoniques. Il a eu du moins le mérite d'étudier ce problème de l'action des marées sous toutes ses formes.

Comme les fluides sont plus ou moins visqueux ou résistants, ils n'obéissent pas instantanément à l'attraction.

[1] Voir surtout Tidal friction and cosmogony, Cambridge 1908, et plusieurs mémoires dans *Scientific papers*.

La formation du bourrelet subit un retard, qui le laisse en arrière dans le mouvement de rotation, ce qui exerce un frottement, une sorte de traînage et de freinage sur l'astre fluide. La marée tend donc à retarder la vitesse de rotation d'un astre, jusqu'à ce qu'il tourne, comme d'une seule pièce, autour de l'astre qui exerce son attraction sur lui. C'est ainsi, comme on l'a vu, que déjà KANT et ensuite LAPLACE expliquaient pourquoi la Lune tournait toujours la même face du côté de la Terre, rivée pour ainsi dire à elle.

C'est encore par la même action des marées que DARWIN explique la formation de la Lune. Au moment où la Terre était complètement fluide, la marée solaire exerçait son action sans entraves. Par un phénomène de résonnance, le bourrelet est devenu énorme au point de se détacher. Ce fut la Lune.

Mais pareille action paraît tout à fait improbable. D'abord il y a deux bourrelets symétriques et nous aurions dû avoir deux Lunes au lieu d'une. Ensuite une pareille action aurait dû se produire, à plus forte raison, sur les planètes Mercure et Vénus, qui sont plus rapprochées du Soleil. Or, tout au contraire, elles n'ont pas de satellites. De plus, cette théorie de formation ne peut absolument pas s'appliquer aux planètes supérieures, Jupiter et Saturne, qui sont trop éloignées pour que la marée solaire y soit même sensible, et qui, cependant, ont chacune toute une couronne de satellites.

Enfin précisons par des chiffres cette action du Soleil. Le bourrelet total, produit par l'action combinée du Soleil et de la Lune sur la Terre actuelle, n'atteint pas plus de 50 cm. d'élévation. L'action du Soleil n'est pas la moitié de celle de la Lune. Le bourrelet correspondant

n'atteindrait pas 20 cm. La distance de la Terre au Soleil est restée à peu près la même, mais le rayon de la Terre ou de la nébuleuse terrestre a dû être plus considérable. Or, la hauteur du bourrelet varie comme la 4e puissance du rayon. Supposons la nébuleuse terrestre s'étendant jusqu'à la distance actuelle de la Lune, soit 60 rayons terrestres, la hauteur du bourrelet serait de 2.600 km. Ça ne correspondrait qu'à une protubérance de 43 km. sur la Terre actuelle, à peine le double du renflement équatorial produit par la rotation, ou le double de son aplatissement. On serait loin d'une rupture possible.

G. H. Darwin a montré comment dans son hypothèse on peut relier les vitesses de rotation à la distance de la Lune, les moments de rotation restant constants. En désignant par M et $m$ les masses $\omega$, $\omega'$ les vitesses de rotation, R le rayon de la terre, $r$ la distance de la Lune, on, a, pour l'expression du moment

$$(1) \qquad \frac{2}{5}M\omega R^2 + m\omega' r^2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{81}\frac{60^2}{27.3} = 2{,}03$$

Le calcul numérique a été fait en prenant la masse de la Terre, son rayon et sa période de rotation comme unité. La troisième loi de Képler donne la relation

$$(2) \qquad \omega'^2 r^3 = \omega_1'^2 r_1^3$$

$r_1$ étant la distance actuelle de la Lune et $\omega_1'$ sa vitesse de rotation actuelle. Cette relation portée dans (1) donne

$$(3) \qquad \frac{2}{5}\omega = 2{,}03 - 1.63\sqrt{\frac{r}{r_1}}.$$

Pour $r = 93$ R on aurait $\omega = 0$. La Lune aurait absorbé tout le moment de rotation de la Terre, en s'éloignant à 93 rayons terrestres.

En faisant $\omega = \omega'$, on déterminera la distance où les vitesses de rotation étaient les mêmes. On obtient

$$0{,}0146 + 1.63\frac{r^2}{r_1^2} = 2.03\left(\frac{r}{r_1}\right)^{3/2} \qquad (4)$$

Cette équation donne comme solution $r = 2{,}5$ R. C'est le nombre trouvé par DARWIN. Pour que la Terre et la Lune aient eu la même vitesse de rotation avec le même moment de rotation actuel, la Lune ne pouvait pas être plus près que 2,5 fois le rayon terrestre. Le moment de rotation invariable montre donc que la Lune n'a pas pu se détacher ainsi de la Terre.

Cette distance est de plus une valeur *minimum*. Si on tient compte de l'allongement de la Terre sous l'attraction de la Lune, on voit facilement que la distance calculée augmente encore plus, ce qui rend plus difficile la fusion primitive.

Cependant G.-H. DARWIN n'a pas tenu compte de l'action de la marée solaire, qui a absorbé une partie du moment de rotation de la Terre, pour le reporter sur la translation. L'action du Soleil est un peu moins de moitié de celle de la Lune, rapport de 2,7 à 6,4. Si on ajoute au moment de rotation la partie correspondante absorbée par la marée solaire, on remplacera 2,03 de la formule (4) par 2,72. La solution est 2 rayons terrestres au lieu de 2,5. Elle est plus voisine du but que celle de DARWIN, mais elle est encore deux fois trop grande.

Enfin si l'on tient compte du volume et de la forme de la Terre, il faudra remplacer le 2 du premier terme de la formule (1) par un nombre compris entre 1 et 2 et faire R variable.

On trouve que la coïncidence $\omega = \omega'$ et $R = r$ aurait

lieu pour $r = \frac{1}{4} R_1$. C'est-à-dire qu'en ajoutant à la Terre, la masse et le moment de rotation de la Lune, ce n'est pas dans le passé, que l'on trouverait les conditions nécessaires pour que la Lune se détache de la Terre, mais dans l'avenir. Il faudrait de plus attendre que la Terre se contracte au quart de son rayon actuel, sa densité serait 64 fois plus grande. C'est une impossibilité.

De plus, on a vu dans le premier chapitre, que pour tous les astres connus, planètes ou satellites, réunis ou séparés, leur moment de rotation est tel qu'il rend invraisemblable le fractionnement dans le passé [1]. Pour tous, la figure d'équilibre actuelle, ou en remontant dans le passé, reste dans la série des ellipsoïdes de révolution et n'atteint pas même la série des ellipsoïdes à trois axes, qui *pourraient conduire* à des figures de fractionnement. Pour toutes les figures d'ailleurs ce n'est qu'à la limite extrême de l'aplatissement et de l'allongement que la force centrifuge arrive à égaler l'attraction.

Darwin en cherchant à évaluer le temps exigé par cette évolution a trouvé un minimum théorique de 54 millions d'années. En calculant la viscosité de la Terre, au moyen du résidu inexpliqué de 4″ dans l'accélération séculaire de la Lune, attribuée à l'action des marées, Darwin trouve plusieurs milliards d'années.

On a vu encore au chapitre second, que l'aplatissement de la Terre dépend de la vitesse des couches internes. Si le frottement des marées a une certaine action de ralentissement sur l'écorce, la vitesse des couches intérieures

[1] A. Véronnet. Figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide en rotation. *Journal de Math.*, 1919.

de la Terre ne doit pas être exactement la même que celle de la surface, à moins de lui attribuer une viscosité infinie. Dans ce cas l'aplatissement doit nécessairement être inférieur à 1/297. Or, les mesures les plus récentes paraissent bien confirmer de plus en plus ce dernier chiffre et prouver en même temps que les parties de la Terre tournent tout d'une pièce. Le ralentissement dû aux marées est donc insensible.

Darwin explique aussi par l'action des marées la rotation directe des planètes. Mais il faut remarquer d'abord que le refroidissement est beaucoup plus accentué et plus rapide au début qu'à la fin de l'évolution. S'il a pu contrebalancer l'action des marées, c'est donc bien plutôt dans la première période. C'est la vitesse rétrograde qui aurait dû être accrue.

Pour Jupiter et Saturne, d'ailleurs, cette action de la marée solaire serait réduite de 100 et 1.000 fois la valeur qu'elle possède à la distance de la Terre. Or, leur rotation est également directe et plus rapide que celle de la Terre.

Ajoutons que Darwin a étudié également l'action des marées sur l'excentricité des orbites, et des axes de rotation. Les marées peuvent les accroître et les faire naître. Peut-être que sur ces différents points l'essai d'explication aurait plus de portée. Mais on manque totalement de base pour en évaluer pratiquement et physiquement l'influence. Et c'est pourtant là le point principal.

En effet, tout calcul purement théorique, purement mathématique, est vain, tant qu'il ne permet pas d'aboutir à des calculs vraiment pratiques, réels. Il y a toujours plusieurs causes agissantes dans un phénomène. Il faut les reconnaître toutes, puis mettre en relief la principale.

Il faut faire des hypothèses, puis les reconnaître possibles, c'est l'étude mathématique : enfin les reconnaître vraies, c'est l'étude physique et pratique. Plusieurs phénomènes concourent toujours à la production d'un autre phénomène. Il faut déterminer quel est celui qui va l'emporter. Le muscle qui travaille doit se refroidir, par transformation de la chaleur en travail. Il se refroidit, mais provoque en même temps une circulation et une nutrition plus active, et finalement il s'échauffe. Il en est toujours ainsi dans la nature. Nous nous sommes efforcé, dans l'étude des différentes hypothèses précédentes, de toujours les soumettre à des calculs pratiques, afin de dégager la plus vraie, la plus explicative.

A l'hypothèse cosmogonique de G. H. Darwin il faut rattacher celle de Moulton et Chamberlin [1], l'hypothèse « planétésimale ». Ils supposent qu'une étoile aurait passé autrefois tout près du Soleil alors en formation. Cette action extérieure aurait produit sur le Soleil des marées énormes qui, jointes à la rotation, auraient projeté une partie de la matière du Soleil en dehors de l'astre central. Ces projections de matière se seraient faites ainsi aux deux extrémités d'un diamètre en reproduisant les phénomènes présentés par les nébuleuses spirales. La condensation de cette matière aurait produit les planètes, qui auraient ensuite régularisé leurs orbites.

On voit tout de suite qu'aucune des conditions mécaniques nécessaires n'est remplie ici. Le Soleil tourne beaucoup trop lentement, pour donner un moment de ro-

[1] T.-G. Chamberlin. *The origin of the Eart*, Chicago, 1916. — The planetesimal hypothesis. *Scientia*, t. 16, p. 65 et 165. — F. R. Moulton. An introduction to astronomy, 1917.

tation suffisant aux planètes. Il n'aurait pu leur donner qu'une partie de son moment de rotation, alors qu'avec une masse 1.000 fois moindre, elles en possèdent 30 fois plus. Il y a là une impossibilité absolue.

11. **Esquisse de la formation des astres d'après les calculs de M. A. Véronnet.** — Avant que les astres ne soient formés et condensés, la matière était dispersée dans tout l'espace à l'état d'atomes ou de molécules. Chaque molécule était soumise à l'attraction de toutes les autres, au moins de celles situées en deça d'une certaine distance. La résultante de toutes ces actions était parfaitement déterminée en chaque point.

Si nous remontons plus haut dans le passé, sans doute la matière même n'existait pas. Seul l'éther, milieu électromagnétique universel, emplissait l'espace avec l'ensemble des électrons négatifs et positifs. Avant l'éther et les électrons nous ne savons pas ce qu'il y avait, nous ne savons rien sur ce qui a pu lui donner naissance. Les électrons négatifs et les noyaux positifs ont formé d'abord les atomes, neutres au point de vue électrique, mais possédant un faible résidu attractif, toujours attractif. La gravitation alors était née.

Les atomes étaient dispersés partout dans l'espace, plus ou moins régulièrement. Tout accroissement de densité, dans une région, y produisait un centre d'attraction pour tous les atomes environnants. Nous avons étudié, au chapitre 8, le mécanisme de cette attraction par laquelle un centre s'accroît ainsi peu à peu de toute la matière comprise dans sa sphère d'action, laquelle est limitée par celles des centres voisins.

La nébuleuse primitive ne se divise pas en nébuleuses

élémentaires, séparées par leur surface extérieure. Elle se concentre directement en étoiles, qui s'individualisent de plus en plus, en s'éloignant toujours davantage de la forme nébuleuse primitive. Tel est le jeu direct de l'attraction. Ce n'était qu'en vertu de mouvements de giration purement arbitraires, que certains auteurs ont admis le fractionnement en nébuleuses plus petites, qui continuèrent ensuite leur évolution et leur concentration. On a vu qu'elles ne pouvaient pas être en équilibre dans cet état.

Les premiers centres, faibles et peu étendus, ont donné les premières masses condensées, qui durent être analogues aux comètes, aux bolides, masses de l'ordre d'une tonne, ou moins, ou de plusieurs milliers de tonnes, désignées sous le nom général de *météorites*.

Les régions, où ces premiers centres de condensation étaient un peu plus nombreux, ont constitué d'autres centres de condensation plus étendus, qui ont englobé un grand nombre des premiers. Ces centres d'attraction du second ordre ont constitué les *étoiles*. La température de formation était d'autant plus élevée que la masse était plus considérable, ou la densité du milieu plus grande. On a pu avoir ainsi tous les types d'étoiles, depuis les étoiles blanches très chaudes, jusqu'aux étoiles rouges, ch. 9 et 10.

A leur tour les régions, où les étoiles étaient un peu plus serrées, ont formé des centres d'attraction du troisième ordre. Toutes les étoiles renfermées ainsi dans une même zone d'action s'attirent et se rapprochent de plus en plus, pour constituer un *amas stellaire* qui ira se condensant de plus en plus. La concentration indéfinie des systèmes dégagera une énergie de plus en plus grande

pour entretenir, avec des aspects toujours nouveaux, la vie éternelle de l'Univers.

Dans ces groupes, la densité s'écartait d'autant moins de la densité moyenne de l'ensemble, que le groupe était plus étendu. L'évolution et la concentration, ont été plus rapides dans le premier groupe que dans le second, et surtout le troisième, les météorites se sont formés avant les étoiles et celles-ci avant les amas.

Selon les conditions primitives, l'évolution a pu débuter plus tôt ici où là, être plus rapide en telle région qu'en telle autre. Il semble que dans notre monde stellaire l'évolution des étoiles est terminée, à plus forte raison celle des météorites et celle des atomes.

Dans la région de la Voie Lactée, la concentration en amas semble à peine amorcée. On n'y trouve que des amas ouverts, peu condensés, des étoiles à faibles vitesses. Sur les confins de la Voie Lactée cette évolution paraît plus avancée. Ces amas sont probablement en voie de condensation et non encore à l'état de condensation finale et d'équilibre mécanique, où leur diamètre serait beaucoup plus petit. En dehors de la Voie Lactée, on aurait une évolution plus avancée encore. L'éclat des amas individuels serait plus faible encore et leur présence serait révélée seulement dans le cas de la conflagration, ou du rapprochement de deux amas pour donner une nébuleuse spirale, constituée par la rotation d'un amas double, analogue à une étoile double de notre Voie Lactée.

L'apparence de la Voie Lactée ne nous indique pas que ce soit un système stellaire individualisé, séparé des autres ou en train de se séparer. C'est simplement une région à évolution moins avancée. La direction des vitesses radiales des astres voisins peut seule nous indi-

quer s'ils en font partie, suivant qu'ils s'en rapprochent ou s'en éloignent. Les amas globulaires condensés, situés sur ses bords, en font partie, les nébuleuses spirales, pour la plupart, non.

L'étude de l'action des étoiles, voisines d'une étoile centrale, nous montre qu'autour de chaque Soleil doit se former un, et même plusieurs systèmes de planètes, tournant autour de lui. Même si ces étoiles sont réparties d'une façon homogène, elles exercent une déviation sur les molécules, ou les météorites, qui tombent vers l'astre central. Il y a des régions de déviation, plus ou moins étendues et plus ou moins rapprochées. Le calcul montre que les éléments de la première zone de déviation tombent vers l'étoile centrale, en tournant autour d'elle, avec un moment de rotation du même ordre que celui de nos planètes, et dans un milieu assez résistant pour transformer leurs trajectoires très allongées en trajectoires sensiblement circulaires, ch. XI.

Les centres de condensation, déjà amorcés, ont achevé la concentration de ces éléments en planètes. On démontre de plus que le moment de rotation total est plus grand que celui dû à la translation de la planète autour du Soleil, et la rotation des planètes et des satellites doit être directe. Il peut y avoir exception pour des éléments un peu éloignés, qui subiraient moins complètement l'action du centre, comme pour Uranus et Neptune, pour les satellites les plus éloignés de Jupiter et de Saturne.

On trouve ainsi, *sans autre hypothèse* que celle de la nébuleuse primitive, l'explication des différents éléments mécaniques du système planétaire ; le moment de rotation invariable, négligé par toutes les cosmogonies, la rotation dans le même sens et dans le même plan.

On en déduit que l'existence d'un système planétaire ne doit pas être une exception, mais la règle pour toutes les étoiles. On en déduit également qu'il doit y avoir même *plusieurs systèmes planétaires*. Mais les autres, formés plus tard, avec un moment de rotation plus considérable, se trouvent plus éloignés et invisibles jusqu'à présent. Ils ont conservé des orbites plus allongées, analogues aux comètes, dans un milieu beaucoup moins résistant. Leur masse totale doit dépasser de beaucoup celle du Soleil, au moins 10 fois. Il peut se trouver de véritables étoiles faibles décrivant des orbites allongées autour du Soleil, comme pour les étoiles doubles. Il en est de même pour toutes les étoiles.

Comme toute étoile possède son système de planètes, plus ou moins rapprochées, il s'en trouve d'assez voisines pour finalement tomber sur l'étoile centrale, en produisant une conflagration immense. Nous avons une *étoile nouvelle*. La température élevée peut produire une pression de radiation suffisante pour maintenir autour de l'astre une enveloppe de particules, qui en fait une *étoile géante*. Cette étoile géante, ou étoile rajeunie, suivrait le cycle de Lockyer et de Russell, tandis que les étoiles naines, ou normales, suivraient simplement une marche descendante, dans l'ordre des températures, ch, 10.

Les mêmes calculs expliquent comment les amas globulaires, extérieurs à la Voie Lactée, s'en rapprochent avec de grandes vitesses, et comment les amas ouverts peu condensés, intérieurs à la Voie Lactée, se déplacent parallèlement à son plan.

Les mêmes calculs permettent d'entrevoir dans quel sens évoluera notre Univers, dans les âges futurs.

Le Soleil se refroidit et la Terre fera de même, à moins

qu'elle ne s'en rapproche assez vite, par suite de la résistance du milieu. Dans les étoiles le travail de la contraction se transforme en chaleur, qui se disperse. Le principe de la dégradation de l'énergie conduit à la mort de l'Univers. Pour y échapper, Arrhénius a inventé des mécanismes qui jouent le rôle du démon de Maxwell et utilisent mieux l'énergie, en la transportant des étoiles aux nébuleuses, lesquelles se transformeraient en étoiles et ainsi de suite. Mais il suffit qu'il y ait un seul phénomène irréversible, pour que la dégradation se poursuive indéfiniment et pour que l'Univers évolue continuellement dans un sens, sans recommencement. C'est ce qui a lieu.

Dans un Univers indéfini cela peut demander un temps infini. La dégradation peut se poursuivre asymptotiquement comme elle a pu s'établir asymptotiquement à l'origine. Nous serions entre deux infinis du temps.

D'ailleurs l'évolution cosmique est à peine commencée. Si la condensation des étoiles est à peu près achevée, celle des amas d'étoiles s'ébauche à peine. Celle des étoiles a demandé des millions d'années, celle des amas demandera des milliards en plus. Toutes les étoiles d'un amas finiront par former un seul astre, dont l'évolution sera incommensurablement plus longue que celle d'une étoile. La vie de notre planète ne sera qu'une seconde en regard de la vie de ces Terres nouvelles, dont notre Terre d'ailleurs pourra faire partie.

Les amas d'amas et les Voies Lactées se condenseront à leur tour et ainsi de suite indéfiniment. Si les centres de chaleur et de lumière deviennent de moins en moins nombreux, ils deviendront aussi de plus en plus puissants et sans cesse ainsi l'Univers reprendra une nouvelle vie, agglomérant les débris des vieux mondes qui paraîtront

morts, reformant de nouveaux organismes avec des cellules usées, pour permettre une nouvelle phase de l'évolution.

Après les électrons, ce sont les atomes qui sont apparus, après les atomes ce sont les étoiles, après les étoiles les Voies Lactées. D'un autre côté, après la matière, c'est la vie, après la vie, c'est la pensée, qui apparaît. La loi de la gravitation permet d'entrevoir où et dans quel sens évoluera la matière, non pas vers la mort, mais vers la vie. Aucune loi de l'esprit ne permet au penseur d'entrevoir dans quel sens évoluera éternellement la vie, et la pensée, dont l'homme n'est encore qu'une faible ébauche.

# INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

## Ouvrages.


G.P. Airy. *Figure of the Earth*. London, 1835.

Ch. André. *Les planètes et leur origine*, 2 vol.

P. Appell. *Traité de mécanique rationnelle*, t. 4. *Figures d'équilibre d'une masse liquide en rotation*, 1920.

E. Belot. *Essai de Cosmogonie tourbillonnaire*, 1911.

J. Bosler. *Les théories modernes du Soleil*, 1910.

— *Evolution des étoiles*, 1923.

T. C. Chamberlain. *The origin of the Earth*. Chicago, 1916.

A. C. Clairaut. *La théorie de la figure de la terre*, 1743.

A. R. Clarke. *Geodesy*, London, 1880.

Eddington. *Stellar movements and the structure of the Universe*, 1914.

H. Faye. *Sur l'origine du monde*, 1884.

F. R. Helmert. *Die mathematischer und physikalischer Theorien der höherren Geodäsie*, 2 volumes, Leipzig, 1880-1884.

J. H. Jeans. *Problems of Cosmogony*, 1912.

P. Laplace. *Traité de mécanique céleste*, t. 1-5, 1799.

Du Ligondès. *Formation mécanique du système du monde*, 1897.

N. Lockyer. *L'évolution inorganique*. Alcan, 1905. *The météorite hypothésis*, 1890.

L. Maillard. *Quand la lumière fut*. 2 vol. 1923.

M. Milankowitch. *Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire*, 1920.

Abbé Moreux. *Origine et formation des mondes*, 1912.

C. Parvulesco. *Sur les amas globulaires d'étoiles*, thèse, 1925.

P. Pizetti. *Principes della téoria méccanicea delle figure dei pianeti*. Pisa, 1913.

H. Poincaré. *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, 1902.

— *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, 1912.

J. H. Pratt. *A treatise on attractions. Laplace fonctions and the figure of the Earth.* London, 1871.

J. J. See. *The capture theory of cosmical évolution.* Traduction chez Hermann, 1920.

F. Tisserand. *Traité de mécanique céleste*, t. 2 et 4, 1889–1896.

A. Véronnet. *Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre.* Thèse 1912. *Journ. de Math.*

— *Les hypothèses cosmogoniques modernes*, 1914, Hermann.

— *Les figures d'équilibre et la cosmogonie*, 1926.

Th. Wolff. *Les hypothèses cosmogoniques*, 1886.

## Mémoires

Voir la Bibliographie complète des figures d'équilibre à la fin du t. 4 du *Traité de mécanique rationnelle* de M. P. Appell.

P. Appell. Figures d'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation (*Annuaire du Bureau des longitudes*), 1919.

— Oscillations d'une sphère homogène, *C. R.* t. 171, p. 765, 1920. — Mouvement d'un corps céleste fluide. *C. R.* t. 179, p. 119 et 795.

A. Auric. Sur le calcul de l'énergie accumulée dans le Soleil. *C. R.* t. 167, p. 328.

G. Armellini. Il systema planétare e le sue leggi empiriche. *Scientia*, t. 24, p. 417.

G. Arrhénius. Chimie physique et cosmique, ch. 7. 1912.

— Le Problème de la voie lactée. *Scientia*, t. 15, p. 349.

— L'évolution des mondes.

E. Belot. 1. Les tourbillons et les dualismes en cosmogonie. *Rev. gén. Sc.* 1910, p. 642.

— 2. Théorie physique de la formation des Océans. *C.R.* 1914, p. 89 et p. 647, 1915, *Bull. astr*, 1916.

— 3. Origine des orbites cométaires. *C.R.* 1916.

— 4. Théorie des nébuleuses spirales. *C.R.* 1916.

— 5. Sur les lois de densité interne dans les théories du Soleil. C.R. 1918, p. 753.

— 6. Evolution stellaire et nébulaire et la structure de notre Univers. *Bul. soc. astr.*, 1923, p. 304.

A. Berget. *Le problème de l'atmosphère.*

— *La Terre, sa vie et sa mort.*

O. Bianco. *Il problèma meccanico della figura della Terra*, 2 vol. (1880-1885).

Bigourdan. Etudes récentes sur les comètes et les étoiles filantes. *Revue générale des sc.*, t. 1, p. 65, 1890.

J. Bosler. 1. Diminution de masse du Soleil. *B. soc. ast.*, 1913, p. 168, et *Radium*, t. 10, p. 168 (1913).

— 2. Age de la Terre et durée des périodes géologiques. *Bull. soc. astr.*, 1912, p. 368.

— 3. La résistance du milieu cosmique et l'évolution des orbitres planétaires. *Scientia*, 1922.

A. Boutaric. Etat thermique de l'atmosphère, *Bul. ast.*, 1916, p. 652.

Bredichin. *Méchanische Untersuchangerüber Kometenformen.* Saint-Pétersbourg, 1903.

E. W. Brown. Passage d'une étoile à travers une nébuleuse. *Astroph. J.*, t. 53, 1911.

Butavand. *Les lois empiriques du système solaire.*

T. C. Chamberlain. The planetesimal hypothésis. *Scientia*, t. 16, p. 65 et 165.

C. V. Charlier. 1. Conceptions monistiques et dualistiques de l'Univers stellaire. *Scientia*, t. 22 ,p. 77.

— 2. *Formation des Courants météoriques par la désagrégation des comètes.* Saint-Pétersbourg. bul. 32 1888).

— 3. *Méchanick des Himmels.* Leipsig (1902).

Cordeiro. Tidal action et Nebular évolution dans *Popular Astronomy*, p. 402 (1920).

A. G. Crommelin. Origin and nature of comets. *Scientia*, t. 7, p. 241. *Are the spiral nebula external galaxis*, t. 21, p. 365.

T. C. Crommelin. The capture théory of satellites, *Scientia*, t. 17, p. 1.

A. Danjon. Le diamètre des étoiles. L'*Astronomie*, 1922.

G. H. Darwin. 1. On Jacobis figure of équilibrium for a rotating Mass of liquide (*Proc. Roy. soc.*, t. XVI, 1887).

— 2. The stability of the pear shaped. Figure of équilibrium of a rotating Mass of liquid (*Phil. Trans.*, série A. vol. 200. 1903).

Eddington. 1. The dynamics of a globular stellar system. *Monthly Notices* t. 74, p. 5, t. 75, p. 336, t. 76, p. 37.

— 2. The kinetic energy of a star cluster. M. N. t. 76, p. 525 et 572.

EDDINGTON. 3. On the radiative équilibrium of stars. M.N. t. 77, p. 16 et 596.

— 4. On the conditions in the interior of a star. *Astrop. J.* t. 48, p. 205, *Scientia*, 1918, et *The observatory*. 1920.

— 5. Pulsation of a gaseous star. M.N. t. 79, p. 2 et 177.

L. FABRY. *Etude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes*. 2 vol. 1893.

G. FLAMMARION. Les grandes nébuleuses et les principaux amas d'étoiles. *Bull. soc. astr.*. 1922-1923.

GOUY. Pesanteur et mélange gazeux dans l'atmosphère terrestre. *Bull. astr.*, 1916, p. 664.

P. HUMBERT. Sur la figure piriforme d'une masse fluide (*Comptes Rendus*, t. 160. 19 avril 1915, p. 509).

— Sur les surfaces de Poincaré (*Thèse, Paris*, 1918).

J. H. JEANS. 1. On the theory of star streaming and the structure of the Univers. M.N. t. 76, p. 70 et 552.

— 2. The Méchanism and structure of planetary nebular. M.N. t. 83, p. 481 (1923).

— 3. The present position of the nebular hypothesis. *Scientia*, t. 24, p. 270.

— 4. The stability of a spherical nebula. *Phil. Trans.*, t. 199 (1902-1903).

— 5. The part played by rotation in cosmic evolution. M.N. t. 77, p. 186 (1917).

H. JOLY. Age of the Earth. *Phil. mag.* t. 22, p. 357 (1911), *Trans. Roy. Dublin. Soc.* t. 7, 1902.

LEBOEUF. Histoire des doctrines cosmogoniques de Duhem. *Rev. gén. Sc.*, p. 139, 1915.

G. H. LÉES. La température de l'intérieur de la Terre. Soc. de phys. de Londres. *Rev. gén. Sc.*, 1920, p. 264.

LIAPOUNOFF. 1. Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation (publié en russe en 1884, traduit en français par DAVAUX en 1904. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. 2e série, t. VI).

— 2. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes (Pétrograde, édité par l'Ac. des Sc.).

P. LOWEL. *The évolution of words*.

R. E. de Lury. The évolution of words. *Ast. Soc. Can.*, t. 5, 1911.
L. Maillard. La loi de Newton et les hypothèses cosmogoniques. *Bull. soc. astr.*, 1921.
S. Meunier. Les hypothèses récentes sur l'origine et l'économie de la croûte terrestre (*Scientia*, t. 22, p. 265.)
Globa-Mikhaïlenko. Contribution à l'étude des mouvements d'une masse fluide en rotation (Thèse de Doctorat d'Etat), *Journal de mathém.*, 1920).
Th. Moreux. Les Novae et la constitution de l'Univers. *Scientia*, t. 19, p. 89.
F. R. Moulton. *An introduction to astronomy*, 1917.
W. A. Norton. On the dynamical condition of the head of a comet. *Amer. J. of Scien.*, 30 (1859), 32 (1861).
S. Oppenheim. Die théorie der gleichgeiwichts figuren der Himmels körper. *Encyk der Math. Win*, Band 6. Z. B. 1922.
G. Parwulesco. Les amas globulaires de Persée, *Bull. astr.*, 1924.
Luc Picart. Sur la désagrégation des essaims météoriques. *Thèse*, 1892.
H Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*Comp. rendus*, 1885). *Acta mathématica*, t. VII, 1885).
P. Puiseux. La Terre et la Lune. Forme extérieure et structure interne. L'avenir des planètes. *Scientia*, t. 18, p. 234.
P. Raynaud. *Etudes sur le système solaire. Nouvelle loi des distances des planètes.* 1919.
M.P. Rudzki. L'âge de la Terre. *Scientia*, t. 13, p. 161.
— *Physik der Erde.* Leipzig, 1911.
J. Sargeret. *Le système du monde.* Alcan.
L. Schulhof. Récents travaux sur l'origine des étoiles filantes. *Revue. gén. Sc.*, p. 639, 1893.
T. Sée. La nouvelle science de la cosmogonie. *Scientia*, t. 15.
— La loi de nature dans l'évolution céleste. *Scientia*, t. 15, p. 169.
P. Salet. 1. Hypothèse météorique de Nordman Lockyer. *Rev. gén. Sc.*, p. 134, 1891.
— 2. Les étoiles meurent-elles ? *Bull. soc. ast.* 1923, p .340.
G. Stormer. Sur la densité de l'atmosphère *C. R.* p. 742 (1920).
Strömgren. L'origine des comètes. *Scientia*, t. 24, p. 85.
P. Stroobant. La question des anneaux de Saturne. *Rev. gén. Sc.* p. 437, 1891.

TERRADOS. Les figures d'équilibre d'une masse en rotation. *Scientia*, t. 24, p. 1 et 98.

A. VÉRONNET. 1. Figures d'équilibre d'un liquide en rotation. *J. d. Math.*, 1919. *Rev. gén. Sc.*, 1921. *C. R.*, t. 171, p. 545.

— 2. Constitution physique du Soleil et des étoiles. *Bull. ast.*, 1918-1920, 1921. — L'*Astronomie*, 1918, — *C.R.* t. 165, p. 1035, t. 166, p. 109, t. 167, p. 722. — *Rev. gén. des Sc.*, 1920.

— 3. Evolution du Soleil et de la Terre. *C. R.*, t. 158, p. 1649 ; — t. 166, p. 280, 642, 812 et 901 ; — t. 167, p. 67 ; — t. 168, p. 398 et 679 ; — *Rev. gén. Sc.*, 1923.

— 4. Etude de la formation des astres. *C. R.* t. 169, p. 844 ; t. 170, p. 40, et 1565, t. 171, p. 707, t. 172, p. 666 et 957, t. 177, p. 624. — *Bul. ast.*, 1923.

— 5. Limite d'une atmosphère. *C. R.*, t. 167, p. 528, 636 et 722.

— 6. Action de résistance du milieu, *C. R.*, t. 172, p. 267, t. 177, p. 750, *Bul. ast.*, 1921, 1923.

— 7. Les étoiles géantes. *Ann. Obs. Srasbourg*, 1926, *Bull. Ast.* 1924.

— 8. La dynamique stellaire. *Congrès avancement des Sciences*, 1924-1925.

E. WATERMAN. The present status of the problem of stellar evolution. *Pub. ast. soc. Pac.*, t. 25 (1913).

V. ZEIPEL. Les amas globulaires. *An. Obs. Paris*, t. 25.

# TABLE SYSTÉMATIQUE DES MATIÈRES

—

PRÉFACE. — ..... 1

## CHAPITRE PREMIER

*Les figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation. Conséquences cosmogoniques.*

1. Importance du problème. Les travaux récents. — 2. Résumé historique. Les trois périodes. — 3. Figures ellipsoïdales d'équilibre. Première discussion en prenant la vitesse de rotation comme paramètre. — 4. Deuxième discussion en prenant le moment de rotation comme paramètre. — 5. Troisième discussion. Variation du grand axe avec moment de rotation constant. — 6. Applications à la Terre et aux planètes. — 7. Les figures dérivées des ellipsoïdes. — 8. La stabilité des figures d'équilibre. — 9. L'hypothèse d'un dédoublement et la cosmogonie..... 11

## CHAPITRE II

*Etude d'une masse hétérogène en rotation. Figure de la Terre et des planètes.*

1. Le Problème. Résumé historique. — 2. Calculs généraux sur l'ellipsoïde hétérogène. — 3. Le problème de Clairaut. Premières limites de l'aplatissement. — 4. Le problème de Poincaré. Première limite théorique. — 5. Seconde limite théorique donnée par A. Véronnet. Calculs numériques. — 6. Calculs en seconde approximation. — 7. Hypothèses autres

que celle de Clairaut. — 8. Force tangentielle exercée sur l'écorce. Cause possible des tremblements de Terre et des charriages..... 39

## CHAPITRE III

*Equilibre physique d'un astre gazeux. Gaz parfaits et gaz réels. Cas d'une température uniforme.*

1. Le problème qui se pose. Les diverses sortes d'équilibre et de lois des gaz. — 2. L'état fluide spécial à l'intérieur d'un astre. — 3. La formule des gaz parfaits et l'équilibre adiabatique. Etude critique des résultats. — 4. Equilibre radiatif. Pression de radiation interne et formule des gaz parfaits. Travaux d'Eddington. — 5. Application aux étoiles géantes et aux étoiles naines. — 6. Etude critique de l'équilibre radiatif. — 7. Choix et discussion de la formule relative à un gaz réel. — 8. Inflexion des densités à l'intérieur d'un astre. Séparation nette de l'atmosphère et du noyau dans l'équilibre isothermique. — 9. Le noyau du Soleil. Dilatation totale et poids moléculaire moyen. — 10. Pression à la surface du noyau et masse de l'atmosphère. — 11. Calculs numériques de la variation rapide de la densité entre l'atmosphère et le noyau. Stabilité de la surface du noyau. — 12. Etude générale de l'équilibre physique d'un astre dans le cas d'une température uniforme. — 13. Existence de deux groupes d'astres, les uns condensés, les autres dilatés. Deux cas limites extrêmes, un cas limite intermédiaire. — 14. Variation de la température du noyau avec le rayon de l'astre. — 15. Cas de l'équilibre adiabatique avec formule des gaz réels. — 16. L'intérieur d'un astre gazeux doit avoir sensiblement la même température et la même densité dans toute la masse. Leur variation maximum..... 66

## CHAPITRE IV

*Equilibre physique d'un astre gazeux. Cas d'une densité uniforme Maximum de température possible.*

1. Les deux cas limites de température uniforme et de densité uniforme. — 2. Rapport de la température centrale et de la température superficielle. — 3. Maximum de la température centrale du Soleil. Elle est inférieure au triple, probablement au double, de la température superficielle du noyau. Trois cas particuliers. — 4. Variation de la température extérieure par rapport à la température superficielle. Température moyenne. — 5. Maximum de la température centrale avec la variation du rayon et de la densité. — 6. Variation générale de la température centrale et moyenne en fonction du rayon de l'astre. Courbes et maximum. — 7. Détermination du maximum de la température pour chaque couche. Courbes des températures intérieures. — 8. Variation de la température en fonction de la masse de l'astre et du poids moléculaire du gaz..... 114

## CHAPITRE V

*Equilibre physique et extension de l'atmosphère d'un astre gazeux. Comètes. Etoiles géantes.*

1. Surfaces de niveau autour d'un astre Etude générale. — 2. Cas particuliers. Atmosphères du Soleil, des planètes, des comètes. Calculs de Roche — 3. Désagrégation des comètes. Calculs de Schiaparelli, Charlier. L. Picart. — 4. Formation de la queue et de la tête des comètes. Bessel, Brédichin. — 5. Limite théorique d'une atmosphère déterminée par la vitesse des molécules et la température. — 6. La limite d'extension réelle d'une atmosphère. Application à la Terre et aux planètes. — 7. Limite et composition de l'atmosphère terrestre. Aurores boréales, bolides, étoiles filantes, couche d'absorption dans la haute atmosphère. — 8.

Constitution du noyau du Soleil dans le cas d'un mélange de gaz. Composition et extension de son atmosphère. — 9. Cas des étoiles plus chaudes. Température critique d'une étoile. Etoiles géantes. — 10. Extension de l'atmosphère des comètes suivant la distance au Soleil. — 11. Variation de la température dans l'atmosphère terrestre..... 138

## CHAPITRE VI

*Entretien de la chaleur solaire. Age du Soleil et de la Terre.*

1. Le problème de l'entretien de la chaleur solaire. — 2. Les théories physiques et l'énergie du refroidissement. — 3. Les théories chimiques et l'énergie moléculaire. — 4. Les théories physico-chimiques et l'énergie atomique. — 5. Transformation de la masse en énergie. Hypothèse de M. J. Perrin. — 6. Conséquences et difficultés de l'hypothèse. — 7. Les théories astronomiques et l'énergie de gravitation. — 8. Théorie de la contraction de Helmholtz. L'âge du Soleil et l'Astronomie. — 9. L'âge du Soleil et la Géologie. — 10. L'âge de la Terre et la salure des mers. La radioactivité. — 11. L'âge de la Terre et son refroidissement interne. — 12. Mécanisme interne de l'entretien de la chaleur solaire. — 13. Régime des courants d'entretien dans le Soleil..... 180

## CHAPITRE VII

*Evolution du Soleil et des étoiles. Evolution corrélative de la Terre.*

1. Mécanisme et vitesse de la contraction et du refroidissement d'un astre. Régénération de la chaleur. — 2. Accélération du refroidissement dans le passé en fonction du rayon et de la température. Limites du temps d'évolution. — 3. Calculs pratiques détaillés relatifs à l'évolution du Soleil. — 4. Energie due à une contraction instantanée et température résultante. — 5. Du sens de l'évolution d'un astre gazeux

qui rayonne. — 6. Rayon maximum possible pratiquement. — 7. Evolution spectrale d'une étoile avec le temps. — 8. Les théories de l'évolution stellaire, Lockyer, Russel. — 9. Evolution de la température à la surface de la Terre. — 10. Théories des périodes glaciaires..... 225

## CHAPITRE VIII

*Etude de la condensation et de la formation des astres dans une nébuleuse indéfinie.*

1. Détermination de la vitesse de formation des astres dans une nébuleuse indéfinie. — 2. Etat de la nébuleuse primitive. Le problème cosmogonique restreint et le problème général. — 3. Cas d'une nébuleuse isolée, de densité homogène. — 4. Cas d'une nébuleuse isolée, dont la densité varie en raison inverse du carré de la distance. — 5. Milieu illimité. Surfaces d'égale densité. Surfaces limites. Délimitation des sphères d'attraction. — 6. Cas des particules en mouvement. — 7. Action d'un seul centre d'attraction dans une nébuleuse homogène indéfinie. — 8. Lois générales déduites de la formule du temps de chûte. — 9. Calculs pratiques et numériques avec différentes valeurs des masses. — 10. Temps de formation des différentes couches intérieures. Il est indépendant de la masse primitive, sauf pour le centre. — 11. Accélération ou retard de la formation et de l'évolution des astres suivant la densité du milieu. — 12. Variation de la densité du milieu au voisinage d'une étoile en formation. — 13. Formation simultanée d'un nombre quelconque d'astres dans un milieu indéfini. 268

## CHAPITRE IX

*Détermination de la température de formation des astres. Relations entre le temps et la température de formation*

1. Le problème et ses résultats. — 2. Relation entre la vitesse de formation et la température de chaque couche. — 3.

Température et densité uniformes. Temps maximum de formation du Soleil. — 4. Cas des hautes températures. Température maximum. — 5. Cas de la loi des gaz parfaits. Temps maximum. — 6. Cas où l'on se donne la vitesse de formation. — 7. Température de formation d'une étoile isolée. — 8. Température de formation d'une étoile dans un ensemble. Maximum. — 9. Relations entre la masse, la température et le type spectral des étoiles. — 10. Evolution stellaire et données statistiques sur la répartition des étoiles ..... 306

## CHAPITRE X

*Etude de la formation et de l'évolution des systèmes stellaires. Amas stellaires, étoiles nouvelles, étoiles géantes, nébuleuses spirales.*

1. Constitution de l'Univers stellaire. — 2. Conditions mécaniques d'un amas d'étoiles. — 3. Concentration d'un amas isolé, sphérique ou elliptique, sans conflagration. — 4. Formation des amas dans une nébuleuse indéfinie. Loi de densité. — 5. Temps de formation d'un amas comparé à celui d'une étoile. — 6. Concentration comparée d'un amas et d'une étoile. — 7. Cas du plan indéfini. — 8. Vitesse comparée des étoiles et des amas. — 9. Cas du choc directe de deux étoiles. Etoiles nouvelles. — 10. Choc tangentiel et échauffement superficiel. — 11. Passage d'une étoile dans une nébuleuse. Hypothèse Belot, Nordman. — 12. Collision de deux composantes d'une étoile double ou d'une grosse planète. Hypothèse A. Véronnet. 13. Cas du choc tangentiel de deux amas stellaires. Nébuleuses spirales. — 14. Les étoiles géantes. Les condition physiques normales ne suffisent plus. — 15. Les céphéides. La théorie des pulsations. — 16. Conditions de formation et d'équilibre d'une enveloppe de particules. — 17. Evolution des géantes. Cas de la nébuleuse de Laplace..... 335

## CHAPITRE XI

*Formation des systèmes planétaires. Déviation produite par les étoiles voisines. Action de la résistance du milieu*

1. Le problème planétaire et ses données. Moment de rotation invariable. — 2. Le problème cosmogonique des trois corps. Moment de rotation maximum. — 3. Formation d'un système planétaire par le satellite d'une étoile double, par une étoile nouvelle. — 4. Etude de la déviation produite par les étoiles voisines. — 5. Importance des masses non condensées en étoiles. Le « monde des comètes ». L'absorption. Nébuleuses spirales. — 6. Résistance du milieu. Formules générales. — 7. Variation du grand axe, de l'excentricité et du perihélie. Etude générale. — 8. Etude de la résistance du milieu en fonction de la variation de la masse. — 9. Solution complète dans le cas où la densité du milieu est inverse du carré de la distance à l'astre central. — 10. Calcul des conditions mécaniques réalisées par les éléments qui ont formé les planètes. — 11. Cas des orbites circulaires. Limite de variation des distances.. 379

## CHAPITRE XII

*Etude critique des hypothèses cosmogoniques modernes.*

1. Le double problème qui se pose. — 2. Hypothèse de Kant. — 3. Hypothèse de Laplace. — 4. Critique de l'hypothèse de Laplace. — 5. Hypothèse de Faye. Formules et calculs de M. Maillard. — 6. Hypothèse du colonel du Ligondès. — 7. Hypothèse de M. Belot. — 8. Hypothèse de M. l'Abbé Moreux. — 9. Hypothèse de J.J. See. — 10. Hypothèse de G. H. Darwin. — 11. Esquisse de la formation des astres d'après les calculs de A. Véronnet..... 410

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE..... 463

GASTON DOIN ET Cie, ÉDITEURS, 8, PLACE DE L'ODÉON, PARIS, 6e

# ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

DIRECTEUR : Dr TOULOUSE,

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : H. PIÉRON,

SECRÉTAIRE POUR LES SCIENCES TECHNIQUES : L. POTIN.

## TABLE DES BIBLIOTHÈQUES

DIRECTEURS DES BIBLIOTHÈQUES :

1. *Histoire et Philosophie des Sciences* . . . . A. REY, professeur d'Histoire de la Philosophie dans ses rapports avec la Science à la Sorbonne.

I. SCIENCES PURES

**A. Sciences mathématiques :**

2. *Mathématiques* . . . J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

3. *Mécanique* . . . . J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

**B. Sciences inorganiques :**

4. *Physique* . . . . . A. LEDUC, professeur de physique à la Sorbonne.

5. *Chimie physique* . . J. PERRIN, de l'Institut, professeur de chimie-physique à la Sorbonne.

6. *Chimie* . . . . . A. PICTET, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève.

| | |
|---|---|
| 7. *Astronomie et Physique céleste* . . . . . | J. Mascart, professeur à l'Université, directeur de l'Observatoire de Lyon. |
| 8. *Météorologie* . . . . | J. Mascart, professeur à l'Université, directeur de l'Observatoire de Lyon. |
| 9. *Minéralogie et Pétrographie* . . . . . | A. Lacroix, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, professeur au Muséum d'Histoire naturelle. |
| 10. *Géologie* . . . . . | M. Boule, professeur au Muséum d'Histoire naturelle, directeur de l'Institut de Paléontologie humaine. |
| 11. *Océanographie physique* . . . . . | J. Richard, directeur du Musée Océanographique de Monaco. |

C. **Sciences biologiques normatives :**

| | |
|---|---|
| 12. *Biologie générale* . . | M. Caullery, professeur de zoologie à la Sorbonne. |
| 13. *Physique biologique* . | L. Pech, professeur de physique biologique à la Faculté de Médecine de l'Université de Montpellier. |
| 14. *Chimie biologique* . . | G. Bertrand, de l'Institut, professeur de chimie biologique à la Sorbonne, professeur à l'Institut Pasteur. |
| 15. *Physiologie et Pathologie végétales* . . . | L. Mangin, de l'Institut, directeur du Muséum d'Histoire naturelle. |
| 16. *Physiologie* . . . . . | J.-P. Langlois, professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, directeur de la *Revue générale des Sciences*. |
| 17. *Psychologie* . . . . | E. Toulouse, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile Sainte-Anne. |
| 18. *Sociologie* . . . . | G. Richard, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Bordeaux. |

---

| | |
|---|---|
| 19. *Microbiologie et Parasitologie* . . . . | A. Calmette, membre de l'Académie de Médecine, sous-directeur de l'Institut Pasteur, F. Bezançon, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université de Paris, médecin des Hôpitaux. |

| | | |
|---|---|---|
| 20. *Pathologie.* | A. *Patholog. médicale* . | M. Klippel, médecin des Hôpitaux de Paris. |
| | B. *Neurologie* . . . | E. Toulouse, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile Sainte-Anne. |
| | C. *Path. chirurgicale* . | R. Proust, professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris, chirurgien des Hôpitaux. |

## D. Sciences biologiques descriptives :

| | | |
|---|---|---|
| 21. *Paléontologie* . . . | | M. Boule, professeur au Muséum d'Histoire naturelle, directeur de l'Institut de Paléontologie humaine. |
| 22. *Botanique.* | A. *Généralités et phanérogames* . | H. Lecomte, de l'Institut, professeur au Muséum d'Histoire naturelle. |
| | B *Cryptogames.* . . | L. Mangin, de l'Institut, directeur du Muséum d'Histoire naturelle. |
| 23. *Zoologie* . . . . . | | R Anthony, professeur au Muséum d'Histoire naturelle et à l'École d'Anthropologie. |
| 24. *Anatomie et Embryologie* . . . . . | | R. Anthony, professeur au Muséum d'Histoire naturelle et à l'École d'Anthropologie. |
| 25. *Anthropologie et Ethnographie.* . . . . | | P. Rivet, assistant d'Anthropologie au Muséum d'Histoire naturelle, secrétaire de l'Institut d'Ethnologie de l'Université de Paris. |
| 26. *Économie politique* . . | | G. Renard, professeur d'Histoire du Travail au Collège de France. |

---

## II. Sciences appliquées

### A. Sciences mathématiques :

| | |
|---|---|
| 27. *Mathématiques appliquées* . . . . . | M. d'Ocagne, de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées. |
| 28. *Mécanique appliquée et génie* . . . . . | M. d'Ocagne, de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées. |

### B. Sciences inorganiques :

29. *Industries physiques* . H. Chaumat, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, sous-directeur de l'École supérieure d'Électricité de Paris.

30. *Photographie* . . . A. Seyewetz, sous-directeur de l'École de Chimie industrielle de Lyon.

31. *Industries chimiques* . J. Derôme, inspecteur général de l'Instruction publique, inspecteur des Établissements classés.

32. *Géologie et minéralogie appliquées* . . . . L. Cayeux, professeur au Collège de France et à l'Institut national agronomique.

33. *Construction* . . . . A. Mesnager, de l'Institut, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Ponts et Chaussées.

### C. Sciences biologiques :

34. *Industries biologiques* . G. Bertrand, de l'Institut, professeur de chimie biologique à la Sorbonne, professeur à l'Institut Pasteur.

35. *Botanique appliquée et agriculture* . . { A. *Phanérogames* . H. Lecomte, de l'Institut, professeur au Muséum d'Histoire naturelle. / B. *Cryptogames* . L. Mangin, de l'Institut, directeur du Muséum d'Histoire naturelle.

36. *Zoologie appliquée* . . J. Pellegrin, assistant au Muséum d'Histoire naturelle.

37. *Thérapeutique générale et pharmacologie* . . G. Pouchet, membre de l'Académie de Médecine, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université de Paris.

38. *Hygiène et médecine publiques* . . . . A. Calmette, membre de l'Académie de Médecine, sous-directeur de l'Institut Pasteur.

39. *Psychologie appliquée.* E. Toulouse, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile Sainte-Anne.

40. *Sociologie appliquée* . Th. Ruyssen, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Bordeaux.

M. Albert Maire, bibliothécaire à la Sorbonne, est chargé de l'*Index* de l'Encyclopédie scientifique.

---

Saint-Amand (Cher). — Imp. R. BUSSIÈRE.

Astron.
V.

222312

Author Véronnet,A.

Title Constitution et évolution de l'univers.

University of Toronto
Library

DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET

Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File"
Made by LIBRARY BUREAU